

KLAUSUR

Analysis für Informatiker

01.09.2011

(Wolfram Koepf)

Name:	Vorname:	Matr.-Nr.:	Studiengang:	Versuch-Nr.:
-------	----------	------------	--------------	--------------

Unterschrift:

Für jede Aufgabe gibt es 10 Punkte. Zum Bestehen der Klausur sollten 13 Punkte erreicht werden.

1)	2)	3)
----	----	----

Punkte:	Note:
---------	-------

**Fangen Sie für jede Aufgabe ein neues Blatt an.
Beschreiben Sie nur die Vorderseite der Blätter.
Geben Sie alle Rechenschritte an!**

1. (a) Gegeben sei die Folge definiert durch $v_{n+1} = \frac{1}{4}(4 + v_n^2)$, $n \in \mathbb{N}$, $v_0 = 0$.

(i) Untersuchen Sie die Monotonie der Folge v_n .

(ii) v_n ist durch 3 beschränkt. Berechnen Sie den Grenzwert von v_n .

(b) Berechnen Sie den Grenzwert der folgenden Folge

$$v_n = \frac{4n^2 - 1}{\sqrt[3]{n^{14} - 3n} + n^2}.$$

(c) Beweisen Sie durch vollständige Induktion, dass

$$\sum_{k=1}^n k^3 = \left(\frac{n(n+1)}{2} \right)^2.$$

2. (a) Finden Sie alle Nullstellen des Polynoms

$$p(x) = -2x^3 + x^2 + 2x - 1$$

und schreiben Sie $p(x)$ in faktorisierter Form.

(b) Gegeben sei die Funktion

$$f(x) = \frac{3x^2 - 4x + 1}{-2x^3 + x^2 + 2x - 1}.$$

(i) Zeigen Sie, dass

$$f(x) = \frac{3x - 1}{(-2x + 1)(x + 1)}, \quad x \neq 1.$$

(ii) Zeigen Sie, dass $x_0 = 1$ eine hebbare Stelle ist (d.h. $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) \neq \infty$) und bestimmen Sie den Wert, durch welchen $f(x)$ stetig ergänzt werden kann.

(iii) Partialbruchzerlegung:

Bestimmen Sie $a, b \in \mathbb{R}$, so dass

$$\frac{3x - 1}{(-2x + 1)(x + 1)} = \frac{a}{(-2x + 1)} + \frac{b}{(x + 1)}.$$

(iv) Bestimmen Sie eine Stammfunktion

$$\int f(x)dx \quad \text{von} \quad f(x).$$

3. (a) Geben Sie die Taylorreihe der Funktion

$$f(x) = \frac{\cosh(x^3) - 1}{x^4}$$

und leiten Sie heraus das Taylorpolynom $T(f, x, 0, 10)$ zehnten Grades um $x_0 = 0$. Hinweis: $\cosh(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^{2k}}{2k!}$

(b) Berechnen Sie den folgenden Grenzwert:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 e^x}{\sin^2(x)}.$$

(c) Gegeben sei die Funktion

$$f(x) = e^{\arcsin(x)}$$

Bestimmen Sie eine Stammfunktion

$$\int e^{\arcsin(x)} dx$$

von $f(x)$ mit der Substitution $t = \arcsin(x)$.

Lösungen

1. (a) Folge $v_{n+1} = \frac{1}{4}(4 + v_n^2)$, $n \in \mathbb{N}$, $v_0 = 0$.

(i) Monotonie:

$$v_{n+1} - v_n = \frac{1}{4}(4 + v_n^2) - v_n = \frac{1}{4}(v_n^2 - 4v_n + 4) = \frac{1}{4}(v_n - 2)^2 > 0.$$

$\implies v_n$ ist monoton steigend.

(ii) v_n ist durch 3 beschränkt. Berechnung des Grenzwertes von v_n .

Sei l dieser Grenzwert.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} v_{n+1} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{4}(4 + v_n^2) \iff l = \frac{1}{4}(4 + l^2) \iff l^2 - 4l - 4 = 0 \iff l = 2.$$

$$\implies \lim_{n \rightarrow \infty} v_n = 2.$$

(b) Grenzwert der Folge

$$v_n = \frac{4n^2 - 1}{\sqrt[7]{n^{14} - 3n} + n^2}.$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{4n^2 - 1}{\sqrt[7]{n^{14} - 3n} + n^2} = \left(\frac{\infty}{\infty}\right).$$

$$v_n = \frac{4n^2 - 1}{\sqrt[7]{n^{14} - 3n} + n^2} = \frac{4n^2 - 1}{\sqrt[7]{n^{14}(1 - 3\frac{1}{n^{13}})} + n^2} = \frac{4n^2 - 1}{\sqrt[7]{n^{14}} \sqrt[7]{(1 - 3\frac{1}{n^{13}})} + n^2}$$

$$\frac{n^2(4 - \frac{1}{n^2})}{n^2(\sqrt[7]{(1 - 3\frac{1}{n^{13}})} + 1)} = \frac{4 - \frac{1}{n^2}}{\sqrt[7]{(1 - 3\frac{1}{n^{13}})} + 1} \implies \lim_{n \rightarrow \infty} v_n = \frac{4}{1 + 1} = 2$$

(c) Beweis durch Induktion, dass

$$\sum_{k=1}^n k^3 = \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2.$$

(i) Induktionsanfang:

$$n = 1 : \sum_{k=1}^1 k^3 = 1^3 = 1 = \left(\frac{1(1+1)}{2}\right)^2 ;$$

(ii) Induktionsvoraussetzung:

$$\sum_{k=1}^n k^3 = \left(\frac{n(n+1)}{2} \right)^2.$$

(iii) Induktionsschluss:

$$\sum_{k=1}^{n+1} k^3 = \left(\frac{(n+1)(n+2)}{2} \right)^2.$$

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{n+1} k^3 &= \sum_{k=1}^n k^3 + \sum_{k=n+1}^{n+1} k^3 = \left(\frac{n(n+1)}{2} \right)^2 + (n+1)^3 = \\ &= \frac{n^2(n+1)^2}{3} + (n+1)^3 = \frac{1}{4}(n+1)^2(n^2+4(n+1)) = \frac{1}{4}(n+1)^2(n^2+4n+4) = \\ &= \frac{1}{4}(n+1)^2(n+2)^2 = \left(\frac{(n+1)(n+2)}{2} \right)^2. \end{aligned}$$

2. (a) Nullstellen des Polynoms

$$p(x) = -2x^3 + x^2 + 2x - 1.$$

$p(1) = -2 + 1 + 2 - 1 = 0 \implies x_1 = 1$ ist eine Nullstelle von $p(x)$.
Durch Polynomdivision erhalten wir $p(x) : (x-1) = -2x^2 - x + 1$.
Anschließend erhält man mit der pq -Formel $x_2 = -1$ und $x_3 = \frac{1}{2}$
als Nullstellen von $-2x^2 - x + 1$. $\implies x_1 = 1, x_2 = -1$ und $x_3 = \frac{1}{2}$
sind die Nullstellen von $p(x)$.

Faktorierte Form

$$p(x) = -2\left(x - \frac{1}{2}\right)(x-1)(x+1) = (-2x+1)(x-1)(x+1).$$

(b)

$$f(x) = \frac{3x^2 - 4x + 1}{-2x^2 + x^2 + 2x - 1}.$$

(i) Man zeige, dass

$$f(x) = \frac{3x-1}{(-2x+1)(x+1)}.$$

$3x^2 - 4x + 1$ lässt sich faktorisieren als $(3x-1)(x+1)$, somit ist

$$f(x) = \frac{3x^2 - 4x + 1}{-2x^2 + x^2 + 2x - 1} = \frac{(3x-1)(x+1)}{(-2x+1)(x-1)(x+1)} = \frac{3x-1}{(-2x+1)(x-1)}.$$

(ii) Man zeige, dass $x_0 = 1$ eine hebbare Stelle ist.

$$\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{3x - 1}{(-2x + 1)(x + 1)} = \frac{3 \cdot 1 - 1}{(-2 \cdot 1 + 1)(1 + 1)} = -1.$$

f kann an $x_0 = 1$ durch den Wert -1 ergänzt werden.

(iii) Partialbruchzerlegung:

Man bestimme a , b und c so, dass

$$\frac{3x - 1}{(-2x + 1)(x + 1)} = \frac{a}{(-2x + 1)} + \frac{b}{(x + 1)}.$$

$$\begin{aligned} \frac{3x - 1}{(-2x + 1)(x + 1)} &= \frac{a}{(-2x + 1)} + \frac{b}{(x + 1)}. \\ &= \frac{a(x + 1) + b(-2x + 1)}{(-2x + 1)(x + 1)} \\ &= \frac{x(a - 2b) + (a + b)}{(-2x + 1)(x + 1)} \end{aligned}$$

Mit Koeffizientenvergleich erhält man

$$\begin{cases} a - 2b = 3 \\ a + b = -1 \end{cases} \implies a = \frac{1}{3}, b = -\frac{4}{3}.$$

(iv) Man bestimme

$$\begin{aligned} &\int f(x) dx. \\ \int f(x) dx &= \int \frac{3x - 1}{(-2x + 1)(x + 1)} dx = \int \frac{\frac{1}{3}}{(-2x + 1)} + \frac{-\frac{4}{3}}{(x + 1)} dx \\ &= -\frac{1}{6} \ln | -2x + 1 | - \frac{4}{3} \ln |x + 1| + \text{Const.} \end{aligned}$$

3. (a) Man gebe die Taylorreihe der Funktion

$$f(x) = \frac{\cosh(x^3) - 1}{x^4} \quad \text{Hinweis : } \cosh(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^{2k}}{(2k)!}$$

$$\cosh(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^{2k}}{(2k)!} \implies \cosh(x^3) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(x^3)^{2k}}{(2k)!} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(x)^{6k}}{(2k)!}$$

$$\begin{aligned}
f(x) &= \frac{\cosh(x^3) - 1}{x^4} = \frac{\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(x^3)^{6k}}{(2k)!} - 1}{x^4} = \frac{\left(1 + \frac{x^6}{2} + \frac{x^{12}}{4!} + \frac{x^{18}}{6!} + \frac{x^{24}}{8!} + \dots\right) - 1}{x^4} \\
&= \frac{x^2}{2!} + \frac{x^8}{4!} + \frac{x^{14}}{6!} + \frac{x^{20}}{8!} + \dots = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{x^{6k-4}}{(2k)!}
\end{aligned}$$

Taylorpolynom zehnten Grades:

$$T(f, x, 0, 10) = \frac{x^2}{2!} + \frac{x^8}{4!} + o(x^{10}).$$

(b) Berechnung von

$$\begin{aligned}
&\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 e^x}{\sin^2(x)}. \\
\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 e^x}{\sin^2(x)} &= \lim_{x \rightarrow 0} \left[\left(\frac{x}{\sin(x)} \right)^2 \cdot e^x \right] = 1^2 \cdot 1 = 1.
\end{aligned}$$

(c) Man bestimme

$$\int e^{\arcsin(x)} dx$$

mit der Substitution $t = \arcsin(x)$.

$$t = \arcsin(x) \iff \sin(t) = x \implies \cos(t) dt = dx$$

$$I = \int e^{\arcsin(x)} dx = \int e^t \cos(t) dt$$

Mit partieller Integration haben wir:

$$\begin{cases} u = e^t \implies u' = e^t \\ v' = \cos(t) \implies v = \sin(t) \end{cases} \implies I = e^t \sin(t) - \int e^t \sin(t) dt$$

$$\begin{cases} u_1 = e^t \implies u'_1 = e^t \\ v'_1 = \sin(t) \implies v_1 = -\cos(t) \end{cases} \implies I = e^t \sin(t) - \left(-e^t \cos(t) + \int e^t \cos(t) \right)$$

$$\implies I = e^t \sin(t) + e^t \cos(t) - I \implies 2I = (\sin(t) + \cos(t))e^t$$

$$\implies I = \frac{1}{2}(\sin(t) + \cos(t))e^t. \quad \text{Rücksubstitution liefert}$$

$$I = \int e^{\arcsin(x)} dx = \frac{1}{2}(x + \cos(\arcsin(x)))e^{\arcsin(x)} + \text{const.}$$