KLAUSUR

Analysis
(Informatiker)

11.9.2012

(W. Strampp)

Name:	Vorname:	Matr.-Nr.:	Versuch-Nr.:

Unterschrift:

Für jede Aufgabe gibt es 10 Punkte. Zum Bestehen der Klausur sollten 13 Punkte erreicht werden.

1)	2)	3)

Punkte:	Note:

Fangen Sie für jede Aufgabe ein neues Blatt an.
Beschreiben Sie nur die Vorderseite der Blätter.
Geben Sie alle Rechenschritte an!

1. (a) Gegeben seien die Folgen:

$$a_n = \frac{5\,n + (-1)^n\,\sin(n)}{3\,n+4}\,,\; b_n = \frac{\cos(n)}{\sqrt{n^2+1}}\,,\; n \in \mathbb{N}_0\,.$$

   Berechnen Sie jeweils den Grenzwert.

   (b) Durch folgende Rekursionsformel wird eine Folge c_n, $n \in \mathbb{N}_0$, gegeben:

$$c_{n+1} = \sqrt{2\,c_n + 1}\,,\; c_0 = 2\,.$$

   Zeigen Sie mit vollständiger Induktion: 1) Die Folge c_n ist streng monoton wachsend. 2) Die Folge c_n ist durch die Zahl 3 nach oben beschränkt. Berechnen Sie den Grenzwert der Folge c_n.

2. (a) Gegeben sei die Funktion: $f(x) = \ln(x^2+1)\,,\; x \in \mathbb{R}_{\geq 0}\,.$
   Geben Sie den Wertebereich $f(\mathbb{R}_{\geq 0})$ an.
   Wie lautet die Umkehrfunktion f^{-1} von f?

   (b) Gegeben sei die Funktion:

$$g(x) = 2\,x - 1 + \frac{x}{x^2-2}\,,\; x \in \mathbb{R}\,, x \neq \pm\sqrt{2}\,.$$

   Geben Sie folgende Grenzwerte an:

$$\lim_{x\to\pm\infty} (g(x) - 2\,x + 1)\,,$$

$$\lim_{x\to\sqrt{2}^+} g(x)\,,\; \lim_{x\to\sqrt{2}^-} g(x)\,,\; \lim_{x\to-\sqrt{2}^+} g(x)\,,\; \lim_{x\to-\sqrt{2}^-} g(x)\,,$$

   und skizzieren Sie die Funktion g.

3. Gegeben sei die Funktion:

$$f(x) = \frac{x+3}{x^2+1}\,,\; x \in \mathbb{R}\,.$$

   (a) Welche Stellen kommen als Extremalstellen von f infrage?
   (b) Welche Stammfunktionen besitzt f?
   (c) Wie lautet das Taylorpolynom vom Grad 4 der Funktion f um den Entwicklungspunkt 0? (Hinweis: Geometrische Reihe).

Lösungen:

1.a)

$$a_n = \frac{5\,n + (-1)^n\,\sin(n)}{3\,n + 4} = \frac{5 + (-1)^n\,\frac{\sin(n)}{n}}{3 + \frac{4}{n}}\,.$$

$$\left|(-1)^n\,\frac{\sin(n)}{n}\right| \le \frac{1}{n} \implies \lim_{n\to\infty}(-1)^n\,\frac{\sin(n)}{n} = 0$$

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \frac{5}{3}\,.$$

$$b_n = \frac{\cos(n)}{\sqrt{n^2+1}} = \frac{\frac{\cos(n)}{n}}{\sqrt{1+\frac{1}{n^2}}}\,.$$

$$\left|\frac{\cos(n)}{n}\right| \le \frac{1}{n} \implies \lim_{n\to\infty}\frac{\cos(n)}{n} = 0$$

$$\lim_{n\to\infty} b_n = 0\,.$$

Oder:

$$|b_n| \le \frac{1}{\sqrt{n^2+1}} \implies \lim_{n\to\infty} b_n = 0$$

1.b)

1) $c_0 > 0$ und $c_n > 0$ für $n \ge 1$.
Ind. Anf. : $c_1 = \sqrt{5} > 2 = c_0$.
Ind. Ann. : Für ein $n \ge 0$ gelte: $c_{n+1} > c_n$.
Ind. Schluss: $c_{n+1} > c_n \implies 2\,c_{n+1} + 1 > 2\,c_n + 1$
$\implies c_{n+2} = \sqrt{2\,c_{n+1}+1} > \sqrt{2\,c_n+1} = c_{n+1}$.
2) Ind. Anf. : $c_0 = 2 \le 3$.($c_0 = 2 < 3$).
Ind. Ann. : Für ein $n \ge 0$ gelte: $c_n \le 3$. ($c_n < 3$).
Ind. Schluss: $c_{n+1} = \sqrt{2\,c_n+1} < \sqrt{2\cdot 3+1} = \sqrt{7} \le 3$. ($\sqrt{7} < 3$).

Sei $\lim_{n\to\infty} c_n = c$, dann gilt:
$c = \sqrt{2\,c+1} \implies c^2 = 2\,c + 1 \iff c = 1 \pm \sqrt{2}$.
Der Grenzwert ist $c = 1 + \sqrt{2}$.

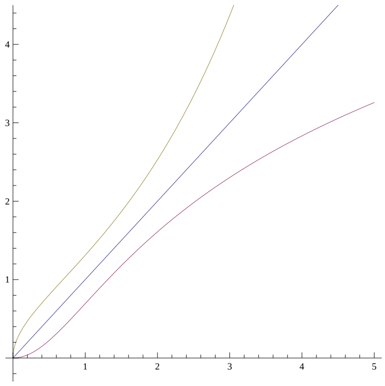
2.a)

$$x^2+1 \geq 1\,, \ln(x^2+1) \geq 0\,, f(\mathbb{R}_{\geq 0}) = \mathbb{R}_{\geq 0}\,.$$

$$y = \ln(x^2+1) \iff e^y = x^2+1 \iff x^2 = e^y - 1$$

$$x = \sqrt{e^y-1}\,, y \geq 0\,,$$

$$f^{-1}(x) = \sqrt{e^x-1}\,, x \geq 0\,.$$



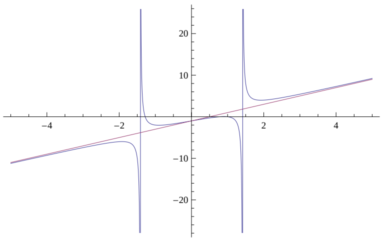
Die Funktion $f(x) = \ln(x^2+1)$
mit der Umkehrfunktion
$f^{-1}(x) = \sqrt{e^x-1}$
und der ersten Winkelhalbierenden

2.b)

$$\lim_{x\to\pm\infty}(g(x)-2x+1) = \lim_{x\to\pm\infty}\frac{x}{x^2-2} = \lim_{x\to\pm\infty}\frac{\frac{1}{x}}{1-\frac{2}{x^2}} = 0\,.$$

Oder: $\lim\limits_{x\to\pm\infty}(g(x)-2x+1) = \lim\limits_{x\to\pm\infty}\dfrac{x}{x^2-2} = \lim\limits_{x\to\pm\infty}\dfrac{1}{2\,x} = 0\,.$

$$\lim_{x\to\sqrt{2}^+} g(x) = +\infty\,, \quad \lim_{x\to\sqrt{2}^-} g(x) = -\infty\,, \quad \lim_{x\to-\sqrt{2}^+} g(x) = +\infty\,, \quad \lim_{x\to-\sqrt{2}^-} g(x) = -\infty\,,$$



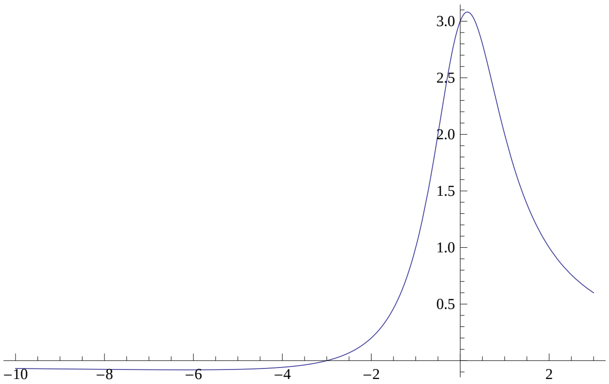
Die Funktion $g(x) = 2\,x-1+\frac{x}{x^2-2}$
mit der Asymptote $y = 2\,x-1$

3.a)

$$f'(x) = \frac{x^2 + 1 - (x+3)\,2\,x}{(x^2+1)^2} = \frac{-x^2 - 6\,x + 1}{(x^2+1)^2}$$

$$f'(x) = 0 \iff x^2 + 6\,x - 1 = 0\,.$$

$$x = -3 \pm \sqrt{10}\,.$$



Die Funktion $f(x) = \frac{x+3}{x^2+1}$

3.b)

$$f(x) = \frac{x+3}{x^2+1} = \frac{1}{2}\,\frac{2\,x}{x^2+1} + 3\,\frac{1}{x^2+1}$$

$$\int f(x)\,dx = \frac{1}{2}\,\ln(x^2+1) + 3\,\arctan(x) + c\,.$$

3.c)

$$f(x) = (x+3)\,\sum_{\nu=0}^{\infty} (-1)^{\nu}\,x^{2\,\nu}\,,\ |x| < 1\,.$$

$$f(x) = \sum_{\nu=0}^{\infty} (-1)^{\nu}\,x^{2\,\nu+1} + 3\,\sum_{\nu=0}^{\infty} (-1)^{\nu}\,x^{2\,\nu}\,.$$

$$f(x) = (x - x^3 + x^5 - x^7 + \cdots) + (3 - 3\,x^2 + 3\,x^4 - 3\,x^6 + \cdots)$$

$$T_4(f, x, 0) = 3 + x - 3\,x^2 - x^3 + 3\,x^4\,.$$