KLAUSUR

Analysis
(Informatiker)

10.09.2013

(Hans-Georg Rück)

Name:	Vorname:	Matr.–Nr./Studiengang:	Versuch–Nr.:

Unterschrift:

Für jede Aufgabe gibt es 10 Punkte. Zum Bestehen der Klausur sollten 13 Punkte erreicht werden.

1)	2)	3)

Punkte:	Note:

Fangen Sie für jede Aufgabe ein neues Blatt an.
Beschreiben Sie nur die Vorderseite der Blätter.
Geben Sie alle Rechenschritte an!

Aufgabe 1: a) Berechnen Sie die Grenzwerte der Folgen $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ und $(b_n)_{n=1}^{\infty}$ mit

$$a_n = \frac{7\,n}{\sqrt[3]{27\,n^3 + n^2 + 5}} \text{ und } b_n = \frac{-8\,n^2 + (-1)^n\,n}{2\,n^2 + 3} \,.$$

b) Die Folge $(c_n)_{n=1}^{\infty}$ sei rekursiv definiert durch

$$c_1 = 1\,,\; c_{n+1} = \frac{c_n}{2} + 1\,.$$

Zeigen Sie mit vollständiger Induktion, dass gilt

$$c_n = 2 - \frac{1}{2^{n-1}} \text{ für alle } n \in \mathbb{N}\,.$$

Aufgabe 2: Betrachten Sie die Funktion

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \text{ mit } f(x) = (x-1)\,e^{-\frac{x^2}{2}+x}\,.$$

a) Berechnen Sie alle Nullstellen von f.
b) Berechnen Sie alle lokalen Minima und lokalen Maxima von f.
c) Wie viele Wendepunkte hat f höchstens? Begründen Sie Ihre Antwort!
d) Berechnen Sie die Grenzwerte $\lim_{x\to+\infty} f(x)$ und $\lim_{x\to-\infty} f(x)$.
e) Skizzieren Sie den Graph von f und bestimmen Sie die Wertemenge $\{f(x) \mid x \in \mathbb{R}\}$.

Aufgabe 3: a) Berechnen Sie eine Stammfunktion von

$$f(x) = \frac{2\,x}{x^2 + x - 6}$$

mittels Partialbruchzerlegung.
b) Berechnen Sie (durch Anwendung einer geeigneten Substitution) das bestimmte Integral

$$\int_{\frac{2}{\pi-2}}^{\frac{3}{\pi-3}} \frac{1}{x^2}\,\sin\!\left(\frac{x+1}{x}\right) dx\,.$$

Lösungsskizze

Aufgabe 1

(a)

$$a_n = \frac{7\,n}{\sqrt[3]{27\,n^3+n^2+5}} = \frac{7}{\sqrt[3]{27+\frac{1}{n}+\frac{5}{n}}} \quad \Longrightarrow \lim_{n\to+\infty} a_n = \frac{7}{\sqrt[3]{27+0+0}} = \frac{7}{3}\ .$$

$$b_n = \frac{-8\,n^2+(-1)^n\,n}{2\,n^2+3} = \frac{-8+\frac{(-1)^n}{n}}{2+\frac{3}{n^2}} \quad \Longrightarrow \lim_{n\to+\infty} b_n = \frac{-8+0}{2+0} = -4\ .$$

(b)

$$c_1 = 1, \quad c_{n+1} = \frac{c_n}{2}+1$$

$$n=1: \quad c_1 = 1 = 2-\frac{1}{2^0}, \quad \text{ok .}$$

$$n \rightsquigarrow n{+}1: \quad c_{n+1} = \frac{c_n}{2}{+}1 = \frac{1}{2}\left(2-\frac{1}{2^{n-1}}\right){+}1 = 1{-}\frac{1}{2^n}{+}1 = 2{-}\frac{1}{2^{(n+1)-1}} \quad \text{ok .}$$

Aufgabe 2

$$f(x) = (x-1)e^{-\frac{x^2}{2}+x}\ .$$

(a) Vorbemerkt: $e^u \neq 0$ für alle $u \in \mathbb{R}$.
Nullstelle: $x = 1$.

(b)

$$f'(x) = 1.e^{-\frac{x^2}{2}+x}{+}(x{-}1)e^{-\frac{x^2}{2}+x}(-x{+}1) = e^{-\frac{x^2}{2}+x}(-x^2{+}2x{-}1{+}1) = x(-x{+}2)e^{-\frac{x^2}{2}+x}\ .$$

$$f''(x) = (-2x{+}2)e^{-\frac{x^2}{2}+x}{+}(-x^2{+}2x)e^{-\frac{x^2}{2}+x}(-x{+}1) = (x^3{-}3x^2{+}2)e^{-\frac{x^2}{2}+x}\ .$$

$$f'(x) = 0 \Longleftrightarrow x = 0 \quad \text{oder} \quad x = 2\ .$$

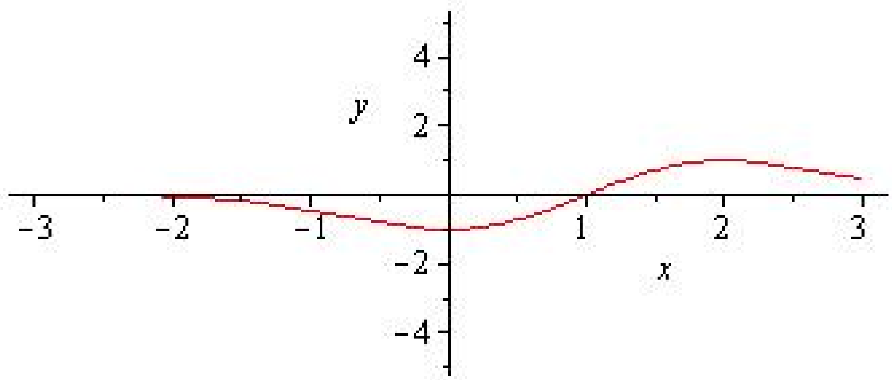
$$f''(0) = e^0\cdot 2 > 0\ . \quad \text{lokales Minimum bei 0,} \quad f(0) = -1\ .$$

$$f''(2) = (8-12+2)e^{\cdot\cdot} < 0\ . \quad \text{lokales Maximum bei 2,} \quad f(2) = 1\ .$$

(c) Wendepunkte: Höchstens Nullstellen von x^3-3x^2+2, also höchstens 3 .
(Skizze zeigt später, dass es wirklich 3 sind!)

(d)

$$\lim_{n\to\pm\infty} e^{-\frac{x^2}{2}+x}(x-1) = \lim_{n\to\pm\infty} \frac{x-1}{e^{\frac{x^2}{2}-x}} = \frac{1}{\infty} = 0\,. \quad \text{(L'Hospital)}$$



(e)

Hieraus sieht man, dass $\{f(x)|x \in \mathbb{R}\} = [-1, 1]$

Aufgabe 3

(a)

$$\frac{2x}{x^2+x-6} = \frac{2x}{(x+3)(x-2)} = \frac{A}{x+3} + \frac{B}{x-2}\,.$$

somit $\quad 2x = A(x-2)+B(x+3), \quad A+B=2, \quad -2A+3B=0.$ also $\quad A = \frac{6}{5}, B = \frac{4}{5}$.

$$\Longrightarrow \frac{2x}{x^2+x-6} = \frac{\frac{6}{5}}{x+3} + \frac{\frac{4}{5}}{x-2}\,.$$

Stammfunktion von $f(x)$: $\frac{6}{5}\ln|x+3| + \frac{4}{5}\ln|x-2|$.

(b)

$$\int_{\frac{2}{\pi-2}}^{\frac{3}{\pi-3}} \frac{1}{x^2}\,\sin(\frac{x+1}{x})\,dx$$

Substituiere $\frac{x+1}{x} = 1+\frac{1}{x} = u$, dann $du = -\frac{1}{x^2}dx$. $\quad u_{oben} = 1+\frac{\pi-3}{3} = \frac{\pi}{3}$.
$u_{unten} = 1+\frac{\pi-2}{2} = \frac{\pi}{2}$.

$$\int_{\frac{2}{\pi-2}}^{\frac{3}{\pi-3}} \frac{1}{x^2}\,\sin(\frac{x+1}{x})\,dx = \int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{3}} -\sin(u)du = [\cos(u)]_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{3}} = \frac{1}{2} - 0 = \frac{1}{2}\,.$$