KLAUSUR

Analysis
(Informatiker)

13.09.2016

Dr. habil. Sebastian Petersen
Dr. Anen Lakhal

Name:	Vorname:	Matr.–Nr./Studiengang:	Versuch–Nr.:

Unterschrift:

Für jede Aufgabe gibt es 10 Punkte. Zum Bestehen der Klausur sollten 13 Punkte erreicht werden.

1)	2)	3)

Punkte:	Note:

Fangen Sie für jede Aufgabe ein neues Blatt an.
Beschreiben Sie nur die Vorderseite der Blätter.
Geben Sie alle Rechenschritte an!

Aufgabe 1:

(a) Berechnen Sie die Grenzwerte der Folgen $(a_n)_n$ und $(b_n)_n$ mit

$$a_n = \frac{2^{n+1}+1}{2^n+3}\ , \quad b_n = \left(\frac{n-5}{n}\right)^{-n},\ n \in \mathbb{N}.$$

(Hinweis: $\lim\limits_{p\to+\infty} (1+\frac{x}{p})^p = e^x$.)

(b) Gegeben sei eine rekursiv definierte Folge $(a_n)_n$ mit Rekursionsvorschrift

$$a_{n+1} = (a_n)^2 + \frac{1}{4}, \quad n \in \mathbb{N}_{\geq 0}.$$

und mit $0 \leq a_0 \leq \frac{1}{2}$.

(i) Zeigen Sie, dass die Folge $(a_n)_n$ monoton wachsend ist.

(ii) Zeigen Sie, dass die Folge $(a_n)_n$ konvergiert und berechnen Sie ihren Grenzwert.

Im folgenden steht $\ln$ *für den Logarithmus zur Basis* e.

Aufgabe 2:

(a) Berechnen Sie folgende Grenzwerte: $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\cos(3x)-1}{6x^2}$ und $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\ln(1+x)-e^{2x+1}}{(x-1)^2}$.

(b) Gegeben sei die Funktion $h :]0,1[\to \mathbb{R},\ h(x) = \displaystyle\int_x^{x^2} \frac{1}{t}\ln(1-t)\,dt$. Berechnen Sie die erste Ableitung $h'(x)$. Das Ergebnis soll in möglichst einfacher, integralfreier Form angegeben werden.

(c) Gegeben sei die Funktion $g\ :\ ]-1,\infty[\ \to \mathbb{R},\ g(x) = (x+2)^x$. Bestimmen Sie die Gleichung der Tangente an die Funktion g im Punkt $x_0 = 0$. (Hinweis: $a^x = \exp(x\ln(a))$ für $x \in \mathbb{R}$ und $a > 0$.)

Bitte wenden!

Aufgabe 3:

(a) Gegeben sei die Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f(x) = \ln(x^2 - x + 1)$.

(i) Bestimmen Sie die ersten beiden Ableitungen f' und f'' von f und geben Sie das Taylorpolynom zweiten Grades $T_2(f, x, 0)$ von f im Entwicklungspunktpunkt $x_0 = 0$ an.

(ii) Bestimmen Sie die lokalen Extrema von f und klassifizieren Sie diese.

(b) Berechnen Sie die folgenden Integrale:

(i) $\int \dfrac{5x-1}{(x-2)(x+1)}\, dx$. (Ansatz: $\frac{5x-1}{(x-2)(x+1)} = \frac{A}{x-2} + \frac{B}{x+1}$.)

(ii) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \dfrac{\cos(x)}{\sqrt{1-\sin(x)}}\, dx$. (Hinweis: Man substituiere $u = \sin(x)$.)

Lösungsskizze
Aufgabe 1

(a)

$$\lim_{n\to+\infty} a_n = \lim_{n\to+\infty} \frac{2^n(2+\frac{1}{2^n})}{2^n(1+\frac{3}{2^n})} = \lim_{n\to+\infty} \frac{(2+\frac{1}{2^n})}{(1+\frac{3}{2^n})} = 2$$

$$\lim_{n\to+\infty} b_n = \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{(1+\frac{-5}{n})^n} = \frac{1}{e^{-5}} = e^5.$$

(b) (i) Für jeden Startwert $0 \le a_0 \le \frac{1}{2}$ ist die Folge $(a_n)_n$ monoton wachsend, weil

$$a_{n+1} - a_n = a_n^2 + \frac{1}{4} - a_n = (a_n - \frac{1}{2})^2 \ge 0.$$

Außerdem ist $a_n > 0$ für alle $n \ge 1$. (Beachte zwei Mal: Quadrate von reellen Zahlen sind nicht-negativ.)

(ii) Sei $0 \le a_0 \le \frac{1}{2}$ $(*)$. Wir zeigen mit vollständiger Induktion: Es gilt $a_n \le \frac{1}{2}$ für alle $n \in \mathbb{N}_{\ge 0}$. Der *Induktionsanfang* ist hier die Voraussetzung $(*)$; wir müssen nur noch den *Induktionsschritt* durchführen.
Nach Induktionsannahme gilt $a_n \le \frac{1}{2}$. Aus Teil (b)(i) und (*) ist bekannt, dass $a_n \ge 0$. Daraus folgt

$$a_{n+1} = a_n^2 + \frac{1}{4} \le (\frac{1}{2})^2 + \frac{1}{4} = \frac{1}{2}.$$

Dies beendet den Induktionsbeweis.

Die Folge $(a_n)_n$ ist also <u>monoton wachsend</u> und <u>nach oben beschränkt</u>. Mit dem Monotoniekriterium folgt, dass $(a_n)_n$ konvergiert. Sei $a = \lim\limits_{n\to+\infty} a_n$. Für den Grenzwert a muss dann

$$a = a^2 + \frac{1}{4} \quad \text{und} \quad 0 \le a \le \frac{1}{2}$$

gelten, also folgt $a = \frac{1}{2}$.

Aufgabe 2

(a)

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to 0} \frac{\cos(3x)-1}{6x^2} &= \lim_{x\to 0} \frac{-3\sin(3x)}{12x} \quad \text{(L'Hospital)} \\
&= \lim_{x\to 0} \frac{-9\cos(3x)}{12} \quad \text{(L'Hospital)} \\
&= -\frac{3}{4}.
\end{aligned}$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{\ln(1+x) - e^{2x+1}}{(x-1)^2} = \frac{0-e}{(-1)^2} = -e.$$

(b) Betrachte den Integranden $f :]0,1[\to \mathbb{R},\ f(t) = \frac{1}{t}\ln(1-t)$. Die Funktion f ist stetig auf $]0,1[$. Sie besitzt also eine Stammfunktion, die wir mit F bezeichnen. Es folgt

$$h(x) = F(x^2) - F(x)$$

und daraus ergibt sich:

$$\begin{aligned}
h'(x) &= 2xF'(x^2) - F'(x) \\
&= 2x\frac{1}{x^2}\ln(1-x^2) - \frac{1}{x}\ln(1-x) \\
&= 2\frac{1}{x}\ln(1-x^2) - \frac{1}{x}\ln(1-x) \\
&= \frac{1}{x}\ln\left(\frac{(1-x^2)^2}{1-x}\right) \\
&= \frac{1}{x}\ln\Big((1+x)^2(1-x)\Big).
\end{aligned}$$

(c) Die Gleichung der Tangente an die Funktion g im Punkt x_0 ist

$$y = g(x_0) + g'(x_0)(x - x_0).$$

Wir können die Funktion g wie folgt umformen:

$$g(x) = e^{x\ln(x+2)}.$$

Daraus folgt

$$g'(x) = \Big(\ln(x+2) + \frac{x}{x+2}\Big)e^{x\ln(x+2)}.$$

Also ist die Gleichung der Tangente an die Funktion g in $x_0 = 0$ durch

$$y = 1 + \ln(2)x$$

gegeben.

Aufgabe 3

(a) Betrachte $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = \ln(x^2 - x + 1)$.

(i) Es gilt

$$f'(x) = \frac{2x-1}{x^2-x+1} \quad \text{und} \quad f''(x) = \frac{-2x^2+2x+1}{(x^2-x+1)^2}.$$

Es folgt $f(0) = \ln(1) = 0$, $f'(0) = -1$ und $f''(0) = 1$. Das Taylorpolynom vom Grad 2 der Funktion f um den Entwicklungspunkt $x_0 = 0$ ist gegeben durch

$$\begin{aligned}
T_2(f,x,0) &= f(0) + f'(0)x + \frac{1}{2}f''(0)x^2 \\
&= -x + \frac{1}{2}x^2.
\end{aligned}$$

(ii) Offenbar[1] gilt:

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow 2x - 1 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{1}{2}.$$

Also ist $a = \frac{1}{2}$ einzige Nullstelle von f' und daher einziger Kandidat für ein Extremum. Es ist $f''(a) > 0$, daher hat f in $a = \frac{1}{2}$ ein striktes lokales Minumum (und keine weiteren Extrema).

(b) (i) Es gilt

$$\frac{5x-1}{(x-2)(x+1)} = \frac{3}{x-2} + \frac{2}{x+1},$$

wie man mit dem vorgeschlagenen Ansatz durch Koeffizientenvergleich leicht sieht. Es folgt

$$\begin{aligned} \int \frac{5x-1}{(x-2)(x+1)}dx &= \int \frac{3}{x-2}dx + \int \frac{2}{x+1}dx \\ &= 3\ln \mid x-2 \mid + 2\ln \mid x+1 \mid + C. \end{aligned}$$

(ii) Substiution: $\sin(x) = u,\ \cos(x)dx = du$.

$$\begin{aligned} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos(x)}{\sqrt{1-\sin(x)}}\,dx &= \int_{\sin(0)}^{\sin(\frac{\pi}{2})} \frac{du}{\sqrt{1-u}} \\ &= \int_0^1 (1-u)^{-\frac{1}{2}}du \\ &= \Big[-2(1-u)^{\frac{1}{2}}\Big]_0^1 \\ &= 2 \end{aligned}$$

[1] Beachte: Der Nenner von f' hat keine Nullstellen, wie man mit der pq-Formel leicht sieht.