KLAUSUR

Analysis
(Informatik)

12.09.2017

Prof. Dr. Werner Seiler
Dr. Matthias Fetzer, Dominik Wulf

Name:	Vorname:	Matr.–Nr./Studiengang:	Versuch–Nr.:

Unterschrift:

In der Klausur können Sie insgesamt 30 Punkte erreichen.
50% der Punkte reichen sicher zum Bestehen.

1)	2)	3)

Punkte:	Note:

Fangen Sie für jede Aufgabe ein neues Blatt an.
Beschreiben Sie nur die Vorderseite der Blätter.
Geben Sie alle Rechenschritte an!

Aufgabe 1: (10 Punkte)

(a) Bestimmen Sie den Grenzwert der Folge $(a_n)_{n=0}^{\infty}$ mit $a_n = \frac{\cos(n)+4}{5n+1}$.

(b) Zeigen Sie, dass die Folge $(b_n)_{n=0}^{\infty}$ für $b_n = \frac{3^{n+1}+1}{2^n}$ gegen $+\infty$ divergiert.

(c) Gegeben sei die folgende rekursiv definierte Folge:

$$a_0 = 0\,; \quad a_{n+1} = \sqrt{a_n} + 1 \text{ für } n \geq 2.$$

Zeigen Sie, dass die Folge $(a_n)_{n=0}^{\infty}$ durch 4 nach oben beschränkt ist. Beweisen Sie, dass die Folge konvergiert und bestimmen Sie den Grenzwert.

Lösung:

a) Es gilt $-1 \leq \cos(n) \leq 1$ für jedes $n \in \mathbb{N}$ und damit

$$\frac{-1+4}{5n+1} \leq a_n \leq \frac{1+4}{5n+1}.$$

Daraus folgt:

$$0 = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{3}{n}}{5+\frac{1}{n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{-1+4}{5n+1} \leq \lim_{n\to\infty} a_n \leq \lim_{n\to\infty} \frac{1+4}{5n+1} = 0,$$

also $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$ aufgrund des Einschachtelungsprinzips.

b) $b_n = \frac{3^{n+1}+1}{2^n} = 3\left(\frac{3}{2}\right)^n + \frac{1}{2^n}$. Es ist aus der Vorlesung bekannt, dass $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\frac{3}{2}\right)^n = +\infty$ und $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{2^n} = 0$. Mit der erweiterten Rechenregel “$a \cdot \infty + b = \infty$” aus der Vorlesung gilt dann $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = +\infty$.

c)
- Beschränktheit: Beweis mit vollständiger Induktion.
  I-Anfang: $a_0 = 0 \leq 4$.
  I-Annahme: $a_n \leq 4$ für ein $n \in \mathbb{N}$.
  I-Schluss: $a_{n+1} = \sqrt{a_n} + 1 \leq \sqrt{4} + 1 \leq 3 \leq 4$.
- Konvergenz: Laut Vorlesung gilt, dass jede beschränkte monotone Folge konvergiert. Da die Folge durch 4 beschränkt ist, muss nur noch gezeigt werden, dass die Folge monoton (wachsend) ist, d.h. $a_n \leq a_{n+1}$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Dazu wieder vollständige Induktion:
  I-Anfang: $a_0 = 0 \leq 1 = a_1$.
  I-Annahme: $a_n \leq a_{n+1}$ für ein $n \in \mathbb{N}$.
  I-Schluss: Wegen $0 = a_0 \leq a_1 \leq .... \leq a_n \leq a_{n+1}$ ist auch $\sqrt{a_n} \leq \sqrt{a_{n+1}}$ und damit $a_{n+1} = \sqrt{a_n} + 1 \leq \sqrt{a_{n+1}} + 1 = a_{n+2}$.

– Es sei a der Grenzwert der Folge. Wie aus der Vorlesung/Übungen bekannt, muss dann $a = \sqrt{a} + 1$ gelten, also $a - 1 = \sqrt{a}$ bzw. $a^2 - 2a + 1 = a$. Diese Gleichung hat die Lösungen $\frac{3}{2} \pm \frac{\sqrt{5}}{2}$. Da $\frac{3}{2} - \frac{\sqrt{5}}{2} \approx 0,38 < a_1$ kommt wegen der Monotonie $\frac{3}{2} - \frac{\sqrt{5}}{2}$ nicht als Grenzwert in Frage. Der Grenzwert ist also $a = \lim_{n\to\infty} a_n = \frac{3}{2} + \frac{\sqrt{5}}{2}$.

Aufgabe 2: (10 Punkte)
Es sei $a > 0$ eine positive reelle Zahl. Die Funktion f_a sei gegeben durch

$$f_a : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ x \mapsto \mathrm{e}^x(x^2 - a).$$

(a) Bestimmen Sie die Nullstellen von f_a.

(b) Bestimmen Sie die lokalen Extremstellen von f_a.

(c) Handelt es sich bei den lokalen Extremstellen aus (b) um globale Extremstellen?

(d) Bestimmen Sie $\lim_{x\to+\infty} f_a(x)$ und $\lim_{x\to-\infty} f_a(x)$.

(e) Skizzieren Sie f_a für $a = 4$, markieren Sie dabei die in (a) bis (d) bestimmten Eigenschaften.

Lösung:

a) Wegen $\mathrm{e}^x > 0$ für alle x gilt $f_a(x) = \mathrm{e}^x(x^2 - a) = 0 \Leftrightarrow x^2 - a = 0 \Leftrightarrow x = \pm\sqrt{a}$. Also sind $\sqrt{a}$ und $-\sqrt{a}$ die einzigen Nullstellen von f_a.

b) Zunächst die Ableitungen. Mit den üblichen Rechenregeln erhält man:

$$f_a'(x) = \mathrm{e}^x(x^2 - a) + \mathrm{e}^x(2x) = \mathrm{e}^x(x^2 + 2x - a)$$

und dann

$$f_a''(x) = \mathrm{e}^x(x^2 + 2x - a) + \mathrm{e}^x(2x + 2) = \mathrm{e}^x(x^2 + 4x + 2 - a).$$

Für die lokalen Extremstellen muss gelten: $f_a'(x) = 0$, also wie bei a) $x^2 + 2x - a = 0$. Die Lösungen sind $x_1 = -1 + \sqrt{1 + a}$ und $x_2 = -1 - \sqrt{1 + a}$. Wegen

$$f_a''(x_1) = \mathrm{e}^{-1+\sqrt{1+a}}((-1 + \sqrt{1 + a})^2 + 4(-1 + \sqrt{1 + a}) + 2 - a)$$

$$= \mathrm{e}^{-1+\sqrt{1+a}}(1 - 2\sqrt{1 + a} + 1 + a - 4 + 4\sqrt{1 + a} + 2 - a) = \mathrm{e}^{-1+\sqrt{1+a}}(2\sqrt{1 + a}) > 0$$

liegt bei x_1 ein lokales Minimum vor. Analog erhält man wegen

$$f_a''(x_2) = \mathrm{e}^{-1-\sqrt{1+a}}((-1 - \sqrt{1 + a})^2 + 4(-1 - \sqrt{1 + a}) + 2 - a)$$

$$= \mathrm{e}^{-1-\sqrt{1+a}}(1 + 2\sqrt{1 + a} + 1 + a - 4 - 4\sqrt{1 + a} + 2 - a) = \mathrm{e}^{-1-\sqrt{1+a}}(-2\sqrt{1 + a}) < 0$$

ein lokales Maximum bei x_2.

c) Es gilt $\lim\limits_{x\to+\infty} f_a(x) = +\infty$ (da sowohl $\lim\limits_{x\to\infty} \mathrm{e}^x = +\infty$ als auch $\lim\limits_{x\to\infty} x^2 - a = +\infty$). Demnach kann bei x_2 kein globales Maximum vorliegen.

Da f_a' nur zwei Nullstellen hat und stetig ist, kann f_a' nur bei den Nullstellen x_1 und x_2 aus b) das Vorzeichen wechseln. Da bei x_1 ein lokales Minimum von f_a vorliegt und $x_2 < x_1$, ist f_a' also rechts von x_1 positiv und damit ist f_a rechts von x_1 monoton wachsend. Analog ist f_a zwischen x_2 und x_1 monoton fallend. Da

$$f_a(x_2) = \mathrm{e}^{-1-\sqrt{1+a}}((-1-\sqrt{1+a})^2 - a)$$
$$= \mathrm{e}^{-1-\sqrt{1+a}}((-1-\sqrt{1+a})^2 - a) = \mathrm{e}^{-1-\sqrt{1+a}}(1 + 2\sqrt{1+a} + 1 + a - a) > 0$$

und außerdem wegen $x_2 < -a$ links von x_2 keine Nullstelle von f_a liegt, ist f_a links von x_2 positiv. Da

$$f_a(x_1) = \mathrm{e}^{-1+\sqrt{1+a}}((-1+\sqrt{1+a})^2 - a)$$
$$= \mathrm{e}^{-1+\sqrt{1+a}}(1 - 2\sqrt{1+a} + 1 + a - a) < 0,$$

ist auch $f_a(x)$ links von x_2 größer als $f_a(x_1)$ damit liegt bei x_1 ein globales Minimum vor.

d) Wie schon bei c) gezeigt ist $\lim\limits_{x\to+\infty} f_a(x) = +\infty$.

Da $\lim\limits_{x\to-\infty} \frac{1}{\mathrm{e}^x} = \infty$ gilt mit der doppelten Anwendung der Regel von de l'Hospital:

$$\lim_{x\to-\infty} f_a(x) = \lim_{x\to-\infty} \frac{x^2 - a}{\frac{1}{\mathrm{e}^x}} = \lim_{x\to-\infty} \frac{2x}{-\frac{1}{\mathrm{e}^x}} = \lim_{x\to-\infty} \frac{2}{\frac{1}{\mathrm{e}^x}} = \lim_{x\to-\infty} 2\mathrm{e}^x = 0.$$

Aufgabe 3: (10 Punkte)

(a) Bestimmen Sie das Taylorpolynom $T_3(f, x, 1)$ vom Grad 3 um $x_0 = 1$ für die Funktion

$$f:\ \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ x \mapsto \mathrm{e}^{-x^2+1} + 3x.$$

(b) Berechnen Sie mit der Substitution $t = \frac{2}{x}$ das Integral

$$\int \frac{\cos\left(\frac{2}{x}\right)}{x^2}\,\mathrm{d}x.$$

(c) Berechnen Sie das Integral

$$\int_1^{\mathrm{e}} \ln(x)(4x+1)\,\mathrm{d}x.$$

Lösung:

a) Zunächst die ersten drei Ableitungen:

$$f'(x) = -2x\mathrm{e}^{-x^2+1} + 3,$$

$$f''(x) = -2\mathrm{e}^{-x^2+1} - 2x(-2x)\mathrm{e}^{-x^2+1} = \mathrm{e}^{-x^2+1}(4x^2 - 2),$$

$$f''(x) = \mathrm{e}^{-x^2+1}(8x) + \mathrm{e}^{-x^2+1}(-2x)(4x^2 - 2) = \mathrm{e}^{-x^2+1}(-8x^3 + 12x).$$

Setzt man das alles in die Formel

$$T_3(f, x, 1) = f(1) + f'(1)(x-1) + \frac{f''(1)}{2!}(x-1)^2 + \frac{f'''(1)}{3!}(x-1)^3$$

ein, ergibt sich

$$T_3(f, x, 1) = 2 + (x-1) + (x-1)^2 + \frac{2}{3}(x-1)^3.$$

b) Rechnet man wie in den Übungen, erhält man zunächst $\frac{dt}{dx} = -\frac{2}{x^2}$ und damit $dx = -\frac{x^2}{2}dt = -\frac{2}{t^2}dt$. Mit der Substitutionsformel erhält man dann

$$\int \frac{\cos\left(\frac{2}{x}\right)}{x^2}dx = \int \frac{\cos(t)}{\left(\frac{2}{t}\right)^2}(-\frac{2}{t^2})dt = \int -\frac{\cos(t)}{2}dt = -\frac{\sin(t)}{2}.$$

Nach Rücksubstitution ergibt sich dann $\int \frac{\cos\left(\frac{2}{x}\right)}{x^2}dx = -\frac{\sin\left(\frac{2}{x}\right)}{2}$.

c) Zunächst berechnet man mit partieller Integration die Stammfunktion von $\ln(x)(4x+1)$:

$$\int \ln(x)(4x+1)dx = \ln(x)(2x^2 + x) - \int \frac{1}{x}(2x^2 + x)dx$$

$$= \ln(x)(2x^2 + x) - \int (2x+1)dx = \ln(x)(2x^2 + x) - x^2 - x.$$

Damit erhält man

$$\int_1^{\mathrm{e}} \ln(x)(4x+1)dx = \left[\ln(x)(2x^2 + x) - x^2 - x\right]_1^{\mathrm{e}}$$

$$= \ln(\mathrm{e})(2\mathrm{e}^2 + \mathrm{e}) - \mathrm{e}^2 - \mathrm{e} - (\ln(1)(2+1) - 1 - 1) = \mathrm{e}^2 + 2.$$