KLAUSUR

Analysis für Informatiker

13.03.2012

(Wolfram Koepf)

Name:	Vorname:	Matr.–Nr.:	Studiengang:	Versuch–Nr.:

Unterschrift:

Für jede Aufgabe gibt es 10 Punkte. Zum Bestehen der Klausur sollten 13 Punkte erreicht werden.

1)	2)	3)

Punkte:	Note:

Fangen Sie für jede Aufgabe ein neues Blatt an.
Beschreiben Sie nur die Vorderseite der Blätter.
Geben Sie alle Rechenschritte an!

1. (a) Gegeben sei die Folge definiert durch $a_{n+1} = \sqrt{a_n + 6}, n \in \mathbb{N}, a_0 = 1$.
   (i) Man zeige durch vollständige Induktion, dass a_n streng monoton steigend ist.
   (ii) Die Folge (a_n) ist beschränkt (dies muss nicht bewiesen werden). Man berechne den Grenzwert von a_n.

   (b) Man berechne den Grenzwert der Folge
   $$u_n = \left(1 + \frac{x^3}{n^3}\right)^{n^3} \cdot e^{\frac{n+xn^2}{n^2}} .$$

   (c) Man berechne die Summe aller ganzzahligen Vielfachen von 13, die zwischen 1 und 1000 liegen.

2. (a) Gegeben sei die Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$
   $$f(x) = (x^2 + x - 2)e^{-\frac{1}{2}x} .$$
   (i) Man bestimme die Extremalstellen sowie die Monotonie-Intervalle von f.
   (ii) Man skizziere f im Intervall $[-2, 6]$.

   (b) Gegeben sei die Funktion $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$
   $$g(x) = x^2 + x - 2 .$$
   Man finde 2 Teilmengen D_1 und D_2 von $\mathbb{R}$, in denen g umkehrbar ist, und gebe jeweils die Umkehrfunktion an.

   (c) Man berechne das unbestimmte Integral
   $$\int e^{\sqrt{x+1}} dx .$$
   Hinweis: Man substituiere $t = \sqrt{x+1}$ und nutze partielle Integration.

3. Gegeben sei die Funktion
$$f(x) = \frac{-3x^2 + 4x}{(1 + x^2)(1 - 2x)} .$$

(a) Partialbruchzerlegung:
Man bestimme reelle Zahlen a, b und c, so dass $f(x)$ sich in der Form

$$f(x) = \frac{a}{1-2x} + \frac{bx+c}{1+x^2}$$

schreiben lässt.

(b) Gegeben sei die Funktion

$$h(x) = \frac{2x-1}{1+x^2} + \frac{1}{1-2x}\,.$$

Man finde $\int h(x)dx$.

(c) Man löse die Gleichung

$$u^{2x-1} = v^{x+2}, \quad (u, v \in \mathbb{R}_{>0})$$

nach x auf. Man bestimme dann die spezielle Lösung für $u = 100$ und $v = 10$.

Lösungen

1. (a)

   (i) Vollständige Induktion: $a_{n+1} = \sqrt{a_n + 6}, n \in \mathbb{N}, a_0 = 1$.
   Induktionsanfang: $n = 1$

   $$a_1 = \sqrt{a_0 + 6} = \sqrt{1+6} = \sqrt{7} > 1 \quad \text{d.h.} \quad a_1 > a_0 \ .$$

   Induktionsannahme: $a_n > a_{n-1}$

   Induktionsschluss: (Zu zeigen: $a_{n+1} > a_n$**)**
   Aus der Induktionsannahme folgt:

   $$a_n > a_{n-1} \Longleftrightarrow a_n + 6 > a_{n-1} + 6 \Longrightarrow \sqrt{a_n + 6} > \sqrt{a_{n-1} + 6} \Longleftrightarrow a_{n+1} > a_n$$

   (ii) Grenzwert: Sei $a = \lim\limits_{n\to\infty} a_n$ der Grenzwert:

   $$\lim_{n\to\infty} a_{n+1} = \lim_{n\to\infty} \sqrt{a_n + 6} \Longleftrightarrow \lim_{n\to\infty} a_{n+1} = \sqrt{\lim_{n\to\infty} a_n + 6}$$

   $$\Longleftrightarrow a = \sqrt{a+6} \Longleftrightarrow a^2 - a - 6 = 0 \Longleftrightarrow a = 3 \quad \text{oder} \quad a = -2 \Longrightarrow \lim_{n\to\infty} a_n = 3$$

   da a_n eine positive Folge ist.

(b) $u_n = \left(1 + \frac{x^3}{n^3}\right)^{n^3} \cdot e^{\frac{n+xn^2}{n^2}}$

$$\lim_{n\to\infty} u_n = \lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{x^3}{n^3}\right)^{n^3} \cdot \lim_{n\to\infty} e^{\frac{n+xn^2}{n^2}} = e^{x^3} \cdot e^{\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n+xn^2}{n^2}\right)} = e^{x^3} \cdot e^{x} = e^{x^3+x}$$

(c) Man berechne die Summe aller ganzzahligen Vielfachen von 13, die zwischen 1 und 1000 liegen.
Sei S diese Summe

$$\begin{aligned} S &= 13 + 26 + 39 + \cdots + 988 = 13(1 + 2 + 3 + \cdots + 76) \\ &= 13 \sum_{k=1}^{76} k = 13 \cdot \frac{76(76+1)}{2} = 38038 \ . \end{aligned}$$

2. (a) $f(x) = (x^2 + x - 2)e^{-\frac{1}{2}x}$

   (i) Man bestimme die Extremalstellen sowie die Monotonie-Intervalle von f.

   Extremalstelle

$$f'(x) = (2x + 1 - \frac{1}{2}(x^2 + x - 2))e^{-\frac{1}{2}x} = -\frac{1}{2}(x+1)(x-4)e^{-\frac{1}{2}x} .$$

   Extremalstellen an $x_1 = -1$ und $x_2 = 4$.

   Monotonie-Intervalle:
   f ist monoton steigend für alle $x \in [-1, 4]$ da $f'(x) \geq 0$ auf dem Intervall und f ist monoton fallend für alle $x \in (-\infty, -1) \cup (4, \infty)$ da $f'(x) < 0$ auf dem Intervall.

   (ii) Skizze von f im Intervall $[-1, 6]$ hier.

(b) $g(x) = x^2 + x - 2$.
Man finde 2 Teilmengen D_1 und D_2 von $\mathbb{R}$, in denen g umkehrbar ist, und gebe jeweils die Umkehrfunktion an.

$$g(x) = x^2 + x - 2 = \left(x + \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{1}{4} - 2 = \left(x + \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{9}{4}$$

Der Scheitel von g ist $S = (-\frac{1}{2}; -\frac{9}{4})$. Daraus folgt, dass $D_1 = (-\infty, -\frac{1}{2})$ und $D_2 = (-\frac{1}{2}, \infty)$.

Berechnung der jeweilige Umkehrfunktion.

$$y = x^2 + x - 2 \Longrightarrow x^2 + x - 2 - y = 0 \Longrightarrow \left(x + \frac{1}{2}\right)^2 - y - \frac{9}{4} = 0 \Longrightarrow$$

$$x_1 = -\frac{1}{2} + \sqrt{y + \frac{9}{4}} , \quad x_2 = -\frac{1}{2} - \sqrt{y + \frac{9}{4}} .$$

Da D_1 ein negatives Intervall ist, haben wir

$$g^{-1}(x) = -\frac{1}{2} - \sqrt{x + \frac{9}{4}} \quad \text{auf} \quad D_1 \quad \text{und} \quad g^{-1}(x) = -\frac{1}{2} + \sqrt{x + \frac{9}{4}} \quad \text{auf} \quad D_2 .$$

Bild von g^{-1} hier
(c) Man berechne das unbestimmte Integral

$$\int e^{\sqrt{x+1}} dx \ .$$

$$t = \sqrt{x+1} \Longrightarrow dt = \frac{dx}{2\sqrt{x+1}} \Longrightarrow dx = 2\sqrt{x+1}dt = 2tdt \ .$$

$$\int e^{\sqrt{x+1}} dx = \int 2te^t dt$$

Partielle Integration:

$$u = 2t \Longrightarrow u' = 2, \quad v' = e^t \Longrightarrow v = e^t \ .$$

$$\int e^{\sqrt{x+1}} dx = \int 2te^t dt = 2te^t - \int 2e^t = 2te^t - 2e^t \ .$$

Mit Rücksubstitution erhalten wir

$$\int e^{\sqrt{x+1}} dx = 2\sqrt{x+1}e^{\sqrt{x+1}} - 2e^{\sqrt{x+1}} = 2e^{\sqrt{x+1}}(\sqrt{x+1} - 1) \ .$$

3. (a)

$$f(x) = \frac{-3x^2 + 4x}{(1+x^2)(1-2x)} \ .$$

Partialbruchzerlegung:
Man bestimme reelle Zahlen a, b und c, so dass $f(x)$ sich in der Form

$$f(x) = \frac{a}{1-2x} + \frac{bx+c}{1+x^2}$$

schreiben lässt.

$$f(x) = \frac{a(1+x^2) + (1-2x)(bx+c)}{(1-2x)(1+x^2)} = \frac{(a-2b)x^2 + (b-2c)x + a + c}{(1-2x)(1+x^2)}$$

Koeffizientenvergleich liefert

$$a - 2b = -3, \quad b - 2c = 4 \quad a + c = 0 \Longrightarrow a = 1, b = 2, c = -1 \ .$$

somit

$$f(x) = \frac{1}{1-2x} + \frac{2x-1}{1+x^2}$$

(b) Gegeben sei die Funktion

$$h(x) = \frac{2x-1}{1+x^2} + \frac{1}{1-2x} \,.$$

Man finde $\int h(x)dx$.

$$\int h(x)dx = \int \frac{2x-1}{1+x^2}dx - \int \frac{1}{1-2x}dx$$

$$= \int \frac{2x}{1+x^2}dx - \int \frac{1}{1+x^2}dx - \left(-\frac{1}{2}\int \frac{-2}{1-2x}\right) dx$$

$$= \ln(1+x^2) - \arctan(x) + \frac{1}{2}\ln|1-2x| \,.$$

(c) Man löse die Gleichung

$$u^{2x-1} = v^{x+2}, \quad (u, v \in \mathbb{R}_{>0})$$

nach x auf. Man bestimme dann die spezielle Lösung für $u = 100$ und $v = 10$.

$$u^{2x-1} = v^{x+2} \Longrightarrow \ln\left(u^{2x-1}\right) = \ln\left(v^{x+2}\right) \Longrightarrow (2x-1)\ln(u) = (x+2)\ln(v)$$

$$x(2\ln(u) - \ln(v)) = 2\ln(v) + \ln(u) \Longrightarrow x = \frac{2\ln(v)+\ln(u)}{2\ln(u)-\ln(v)} \,.$$

Spezielle Lösung: $u = 100, v = 10$:

$$x = \frac{2\ln(10)+\ln(100)}{2\ln(100)-\ln(10)} = \frac{2\ln(10)+\ln(10^2)}{2\ln(10^2)-\ln(10)} = \frac{2\ln(10)+2\ln(10)}{4\ln(10)-\ln(10)} = \frac{4\ln(10)}{3\ln(10)} = \frac{4}{3} \,.$$