KLAUSUR

Analysis
(Informatiker)

11.3.2013

(W. Strampp)

Name:	Vorname:	Matr.-Nr.	Versuch-Nr.:

Unterschrift:

Für jede Aufgabe gibt es 10 Punkte. Zum Bestehen der Klausur sind 13 Punkte erforderlich.

1)	2)	3)

Punkte:	Note:

Fangen Sie für jede Aufgabe ein neues Blatt an.
Beschreiben Sie nur die Vorderseite der Blätter.
Geben Sie alle Rechenschritte an!

1. (a) Berechnen Sie den Grenzwert der Folgen:

$$a_n = \frac{n\,\sin(n)\,\cos(n)}{n^2+1}\,,\; b_n = \frac{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}\,,\; n \in \mathbb{N}\,.$$

(b) Zeigen Sie durch vollständige Induktion für $n \in \mathbb{N}$:

$$\sum_{\nu=1}^{n} \frac{2\,\nu-1}{2^\nu} = 3 - \frac{2\,n+3}{2^n}\,.$$

2. Gegeben sei die Funktion: $f(x) = \dfrac{\ln(x)}{\ln(x)+1}$.

(a) Für welche $x \in \mathbb{R}$ ist die Funktion erklärt?
Zeigen Sie, dass f in den Intervallen $(0, \frac{1}{e})$ und $(\frac{1}{e}, \infty)$ streng monoton wachsend ist.
(b) Geben Sie folgende Grenzwerte an:

$$\lim_{x\to 0^+} f(x)\,,\; \lim_{x\to\infty} f(x)\,,\; \lim_{x\to \frac{1}{e}^+} f(x)\,,\; \lim_{x\to \frac{1}{e}^-} f(x)\,,$$

und skizzieren Sie die Funktion f.
(c) Berechnen Sie jedem Monotonie-Intervall die Umkehrfunktion von f.
(Hinweis: $x = e^t$).

3. (a) Berechnen Sie den Grenzwert:

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{\ln(x)}{\ln\left(e^x-1\right)}\,.$$

(b) Wie lautet das Taylorpolynom vom Grad 5 um den Punkt $x_0 = 0$ der Funktion: $f(x) = \dfrac{x}{x^2-2} + 2\,x$. (Hinweis: Geometrische Reihe).

(c) Berechnen Sie das Integral: $\displaystyle\int_0^4 \frac{1}{4-\sqrt{x}}\,dx$.

(Hinweis: $\sqrt{x} = t$ substituieren).

Lösungen:

1.a)

$$|a_n| = \left| \frac{n\,\sin(n)\,\cos(n)}{n^2+1} \right| \le \frac{n}{n^2+1}\,.$$

$$\frac{n}{n^2+1} = \frac{\frac{1}{n}}{1+\frac{1}{n^2}} \Longrightarrow \lim_{n\to\infty} a_n = 0\,. \quad \textbf{2P}$$

$$b_n = \frac{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}} = \frac{\sqrt{1+\frac{1}{n}}-1}{\sqrt{1+\frac{1}{n}}+1} \Longrightarrow \lim_{n\to\infty} b_n = 0\,.$$

Oder:

$$b_n = \frac{\left(\sqrt{n+1}-\sqrt{n}\right)\,\left(\sqrt{n+1}+\sqrt{n}\right)}{\left(\sqrt{n+1}+\sqrt{n}\right)^2} = \frac{1}{\left(\sqrt{n+1}+\sqrt{n}\right)^2} \Longrightarrow \lim_{n\to\infty} b_n = 0\,. \quad \textbf{3P}$$

1.b)

Ind. Anf. : $\displaystyle\sum_{\nu=1}^{1} \frac{2\,\nu-1}{2^\nu} = \frac{1}{2}\,,\ 3-\frac{2\cdot 1+3}{2^1} = \frac{1}{2}\,.$ **1P**

Ind. Ann. : Für ein $n \ge 1$ gelte: $\sum_{\nu=1}^{n} \frac{2\,\nu-1}{2^\nu} = 3-\frac{2\,n+3}{2^n}$. **1P**

Ind. Schluss:

$$\begin{aligned}\sum_{\nu=1}^{n+1} \frac{2\,\nu-1}{2^\nu} &= \sum_{\nu=1}^{n} \frac{2\,\nu-1}{2^\nu} + \frac{2\,(n+1)-1}{2^{n+1}} = 3-\frac{2\,n+3}{2^n} + \frac{2\,(n+1)-1}{2^{n+1}} \\ &= 3-\frac{2\,(2\,n+3)-2\,(n+1)+1}{2^{n+1}} = 3-\frac{2\,(n+1)+3}{2^{n+1}}\,. \quad \textbf{3P}\end{aligned}$$

2.a) $\ln(x)$ erklärt für $x > 0$. $\ln(x) + 1 = 0 \Longleftrightarrow x = \frac{1}{e}$.
f ist erklärt für $x > 0, x \neq \frac{1}{e}$. **1P**

$$f'(x) = \frac{\frac{1}{x}\,(\ln(x)+1) - \ln(x)\,\frac{1}{x}}{(\ln(x)+1)^2} = \frac{\frac{1}{x}}{(\ln(x)+1)^2}\,. \quad \mathbf{1P}$$

$f'(x) > 0$, also f streng monoton wachsend. **1P**

2.b)

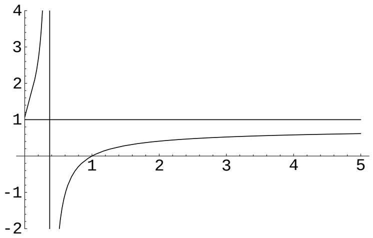
$$\frac{\ln(x)}{\ln(x)+1} = \frac{1}{1+\frac{1}{\ln(x)}} \Longrightarrow \lim_{x\to 0^+} \frac{\ln(x)}{\ln(x)+1} = \lim_{x\to\infty} \frac{\ln(x)}{\ln(x)+1} = 1\,. \quad \mathbf{2P}$$

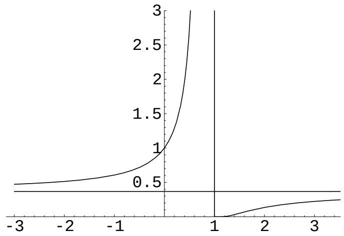
Oder:

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{\ln(x)}{\ln(x)+1} = \lim_{x\to 0^+} \frac{\frac{1}{x}}{\frac{1}{x}} = 1\,,\ \lim_{x\to\infty} \frac{\ln(x)}{\ln(x)+1} = \lim_{x\to\infty} \frac{\frac{1}{x}}{\frac{1}{x}} = 1\,,$$

$$\ln\left(\frac{1}{e}\right) = -1\,,\ \lim_{x\to\frac{1}{e}^+} \frac{1}{\ln(x)+1} = +\infty\,,\ \lim_{x\to\frac{1}{e}^-} \frac{1}{\ln(x)+1} = -\infty\,,$$

$$\lim_{x\to\frac{1}{e}^+} f(x) = -\infty\,,\ \lim_{x\to\frac{1}{e}^-} f(x) = +\infty\,, \quad \mathbf{2P}$$





Die Funktion $f(x) = \frac{\ln(x)}{\ln(x)+1}$ (links) und die Umkehrfunktion $f^{-1}(x) = e^{\frac{x}{1-x}}$ (rechts)

2.c) $x = e^t, t \neq -1$:

$$f(x) = y \iff \frac{t}{t+1} = y \iff t = \frac{y}{1-y} \iff x = e^{\frac{y}{1-y}}$$

$x \longleftrightarrow y$:

$$f^{-1}(x) = e^{\frac{x}{1-x}}\,, x > 1\,. \quad \mathbf{3P}$$

(Erstes Monotonie-Intervall).

$$f^{-1}(x) = e^{\frac{x}{1-x}}\,, x < 1\,.$$

(Zweites Monotonie-Intervall).

3.a)

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{\ln(x)}{\ln(e^x-1)}=\lim_{x\to 0^+}\frac{\frac{1}{x}}{\frac{e^x}{e^x-1}}=\lim_{x\to 0^+}\frac{e^x-1}{x\,e^x}=\lim_{x\to 0^+}\frac{e^x}{e^x+x\,e^x}=1\,.\quad \textbf{3P}$$

3.b)

$$f(x)=\frac{x}{x^2-2}+2\,x=2\,x-\frac{1}{2}\,x\,\frac{1}{1-\frac{x^2}{2}}\quad \textbf{1P}$$

$$f(x)=2\,x-\frac{1}{2}\,x\sum_{\nu=0}^{\infty}\left(\frac{x^2}{2}\right)^{\nu}=\frac{3}{2}\,x-\frac{1}{4}\,x^3-\frac{1}{8}\,x^5-\cdots\quad \textbf{1P}$$

$$T_5(f,x,0)=\frac{3}{2}\,x-\frac{1}{4}\,x^3-\frac{1}{8}\,x^5\,.\quad \textbf{1P}$$

3.c) $\sqrt{x}=t\,,x=t^2$

$$\int_0^4\frac{1}{4-\sqrt{x}}\,dx=\int_0^2\frac{1}{4-t}\,2\,t\,dt\quad \textbf{2P}$$

$$\int_0^2\frac{1}{4-t}\,2\,t\,dt=\int_0^2\left(\frac{-8+2\,t}{4-t}+\frac{8}{4-t}\right)\,dt\quad \textbf{1P}$$

$$\int_0^4\frac{1}{4-\sqrt{x}}\,dx=\left(-2\,t-8\,\ln(4-t)\right)\Big|_0^2=-4-8\,\ln(2)+8\,\ln(4)=-4+8\,\ln(2)\,.\quad \textbf{1P}$$