

KLAUSUR

Analysis
(Informatiker)

10.3.2015

(W. Strampp)

Name:	Vorname:	Matr.-Nr.	Versuch-Nr.:
-------	----------	-----------	--------------

Unterschrift:

Für jede Aufgabe gibt es 10 Punkte. Zum Bestehen der Klausur sind 13 Punkte erforderlich.

1)	2)	3)
----	----	----

Punkte:	Note:
---------	-------

**Fangen Sie für jede Aufgabe ein neues Blatt an.
Beschreiben Sie nur die Vorderseite der Blätter.
Geben Sie alle Rechenschritte an!**

1. (a) Berechnen Sie den Grenzwert der Folgen:

$$a_n = \frac{n^2 + \cos(n)}{n^2 + 1}, \quad b_n = \frac{\sqrt{n+1} - \sqrt{n}}{\sqrt{n}}, \quad n \in \mathbb{N}.$$

- (b) Zeigen Sie durch vollständige Induktion für $n \in \mathbb{N}$:

$$\sum_{\nu=1}^n \frac{\nu}{2^\nu} = \frac{2^{n+1} - n - 2}{2^n}.$$

2. (a) Gegeben ist die Funktion

$$f(x) = \begin{cases} -x & , \quad x \leq 0, \\ x^2 & , \quad x > 0. \end{cases}$$

Begründen Sie, dass die Funktion im Punkt $x_0 = 0$ nicht differenzierbar ist.

- (b) Berechnen Sie folgende Grenzwerte:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln(\ln(x))}{\ln(x)}, \quad \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{\sin(x)} \right).$$

3. (a) Gegeben ist die Funktion: $f(x) = \frac{x}{x^2+1}$.
Berechnen Sie die Grenzwerte: $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x)$.

Geben Sie Monotonie-Intervalle von f an, und skizzieren Sie die Funktion.

Berechnen Sie die Taylorreihe um den Punkt $x_0 = 0$ der Funktion f .

(Hinweis: Geometrische Reihe.)

- (b) Berechnen Sie die folgende Integrale mit der Substitution $x = t^2$:

$$\int \frac{e^{-\sqrt{x}}}{\sqrt{x}} dx, \quad \int \frac{1}{\sqrt{x}(1+x)} dx.$$

Lösungen:

1.a)

$$a_n = \frac{n^2 + \cos(n)}{n^2 + 1} = \frac{n^2}{n^2 + 1} + \frac{\cos(n)}{n^2 + 1} = \frac{1}{1 + \frac{1}{n^2}} + \frac{\frac{\cos(n)}{n^2}}{1 + \frac{1}{n^2}}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{1 + \frac{1}{n^2}} = 1, \quad \left| \frac{\cos(n)}{n^2} \right| < \frac{1}{n^2}, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\cos(n)}{n^2} = 0,$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 1.$$

$$b_n = \frac{\sqrt{n+1} - \sqrt{n}}{\sqrt{n}} = \sqrt{1 + \frac{1}{n}} - 1 \implies \lim_{n \rightarrow \infty} b_n = 0.$$

Oder:

$$b_n = \frac{(\sqrt{n+1} - \sqrt{n})(\sqrt{n+1} + \sqrt{n})}{\sqrt{n}(\sqrt{n+1} + \sqrt{n})} = \frac{1}{\sqrt{n}(\sqrt{n+1} + \sqrt{n})} \implies \lim_{n \rightarrow \infty} b_n = 0.$$

1.b)

$$\text{Ind. Anf.: } \sum_{\nu=1}^1 \frac{\nu}{2^\nu} = \frac{1}{2}, \quad \frac{2^{1+1} - 1 - 2}{2^1} = \frac{1}{2}.$$

$$\text{Ind. Ann.: Für ein } n \geq 1 \text{ gelte: } \sum_{\nu=1}^n \frac{\nu}{2^\nu} = \frac{2^{n+1} - n - 2}{2^n}.$$

Ind. Schluss:

$$\begin{aligned} \sum_{\nu=1}^{n+1} \frac{\nu}{2^\nu} &= \left(\sum_{\nu=1}^n \frac{\nu}{2^\nu} \right) + \frac{n+1}{2^{n+1}} = \frac{2^{n+1} - n - 2}{2^n} + \frac{n+1}{2^{n+1}} \\ &= \frac{2^{n+2} - 2n - 4 + n + 1}{2^{n+1}} = \frac{2^{n+2} - (n+1) - 2}{2^{n+1}}. \end{aligned}$$

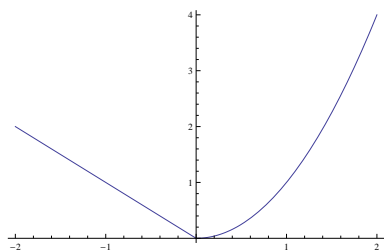
2.a) Linksseitiger Grenzwert:

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{-x}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^-} (-1) = -1.$$

Rechtsseitiger Grenzwert:

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x^2}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} x = 0.$$

Der linksseitige Grenzwert des Differenzenquotienten ist ungleich dem rechtsseitigen Grenzwert des Differenzenquotienten. Also ist f an der Stelle 0 nicht differenzierbar.



Die Funktion

$$f(x) = \begin{cases} x & , \quad x \leq 0, \\ x^2 & , \quad x > 0. \end{cases}$$

2.b)

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln(\ln(x))}{\ln(x)} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{\ln(x)} \cdot \frac{1}{x}}{\frac{1}{x}} = 0.$$

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{\sin(x)} \right) &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(x) - x}{x \sin(x)} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos(x) - 1}{\sin(x) + x \cos(x)} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-\sin(x)}{2 \cos(x) - x \sin(x)} \\ &= 0. \end{aligned}$$

3.a)

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{x}{x^2 + 1} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{1}{2x} = 0.$$

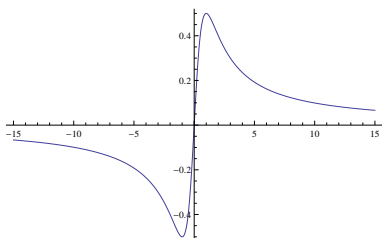
$$f(x) = \frac{x}{x^2 + 1}, \quad f'(x) = \frac{1}{x^2 + 1} - \frac{2x^2}{(x^2 + 1)^2} = \frac{-x^2 + 1}{(x^2 + 1)^2},$$

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = \pm 1.$$

$$f'(x) < 0, \quad x < -1,$$

$$f'(x) > 0, \quad -1 < x < 1,$$

$$f'(x) < 0, \quad 1 < x,$$



Die Funktion

$$f(x) = \frac{x}{x^2+1}$$

$$f(x) = x \sum_{k=0}^{\infty} (-x^2)^k = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k x^{2k+1}, \quad |x| < 1.$$

3.b)

Substitution: $x = t^2$, $t > 0$, $t = \sqrt{x}$, $dx = 2t dt$:

$$\int \frac{e^{-\sqrt{x}}}{\sqrt{x}} dx = \left(\int \frac{e^{-t}}{t} 2t dt \right)_{t=\sqrt{x}} = (-2e^{-t} + c)_{t=\sqrt{x}} = -2e^{-\sqrt{x}} + c,$$

$$\begin{aligned} \int \frac{1}{\sqrt{x}(1+x)} dx &= \left(\int \frac{1}{t(1+t^2)} 2t dt \right)_{t=\sqrt{x}} = (2 \arctan(t) + c)_{t=\sqrt{x}} \\ &= 2 \arctan(\sqrt{x}) + c. \end{aligned}$$