KLAUSUR

Analysis
(Informatiker)

08.03.2016

(W. Koepf)

Name:	Vorname:	Matr.–Nr./Studiengang:	Versuch–Nr.:

Unterschrift:

Für jede Aufgabe gibt es 10 Punkte. Zum Bestehen der Klausur sollten 27 Punkte erreicht werden.

1)	2)	3)	4)	5)	6)

Punkte:	Note:

Fangen Sie für jede Aufgabe ein neues Blatt an.
Beschreiben Sie nur die Vorderseite der Blätter.
Geben Sie alle Rechenschritte an!

Aufgabe 1:

(a) Berechnen Sie den Grenzwert der Folge: $a_n = (1 + \frac{1}{2n^2})^{3n^2}$, $n \in \mathbb{N}$.
(**Hinweis:** $\lim\limits_{p\to+\infty} (1+\frac{1}{p})^p = e$.)

(b) Zeigen Sie mit vollständiger Induktion: $\sum\limits_{k=1}^{n} (2k-1) = n^2$ für $n \geq 1$.

(c) Berechnen Sie den Grenzwert: $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1+3+5+\cdots+(2n-1)}{2+4+6+\cdots+2n}$.

(**Hinweis:** Man verwende (b) und $\sum\limits_{k=1}^{n} k = \dfrac{n(n+1)}{2}$.)

Aufgabe 2:
Gegeben sei $a > 0$ ein reeller Parameter und eine Funktion $f_a : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definiert durch

$$f_a(x) = (x^2 - 4x + 5)e^{x-a}.$$

(b) Berechnen Sie alle lokalen Extremstellen von f_a und geben Sie jeweils an, ob es sich um ein lokales Maximum oder Minimum handelt.

(c) Berechnen Sie die Wendepunkte von f_a.

(d) Berechnen Sie die Grenzwerte $\lim\limits_{x\to+\infty} f_a(x)$ und $\lim\limits_{x\to-\infty} f_a(x)$.

Aufgabe 3:

(a) Berechnen Sie das Taylorpolynom vom Grad 2 der Funktion $f(x) = (8+x)^{\frac{1}{3}}$ um den Punkt $x_0 = 0$.

(b) Berechnen Sie folgende Integrale:

$$I_1 = \int_0^a \frac{x}{e^{2x}}\, dx,\ a > 0 \quad \text{und} \qquad I_2 = \int_1^\infty \frac{dx}{x+x^2}\, dx.$$

Lösungsskizze

Aufgabe 1

a) $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = \lim\limits_{n\to+\infty} (1+\frac{1}{2n^2})^{\frac{3}{2}(2n^2)} = \lim\limits_{n\to+\infty} ((1+\frac{1}{2n^2})^{2n^2})^{\frac{3}{2}} = e^{\frac{3}{2}}.$

b) **1- Induktionsanfang:**

$$\sum_{k=1}^{1}(2k-1) = 1 = 1^2.$$

2- Induktionsschritt:
Vorraussetzung:

$$\sum_{k=1}^{n}(2k-1) = n^2 \text{ gilt für ein } n \in \mathbb{N}$$

Behauptung:

$$\sum_{k=1}^{n+1}(2k-1) = (n+1)^2.$$

Beweis:

$$\sum_{k=1}^{n+1}(2k-1) = \sum_{k=1}^{n}(2k-1) + 2(n+1) - 1 = n^2 + 2n + 1 = (n+1)^2.$$

c) Aus $\sum\limits_{k=1}^{n} k = \dfrac{n(n+1)}{2}$ folgt im Nenner:

$$2+4+6+\cdots+2n = 2\sum_{k=1}^{n} k = n(n+1)$$

und weiter

$$\frac{1+3+5+\cdots+(2n-1)}{2+4+6+\cdots+2n} = \frac{n^2}{n(n+1)} = \frac{1}{1+\frac{1}{n}}.$$

Hieraus folgt sofort:

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{1+3+5+\cdots+(2n-1)}{2+4+6+\cdots+2n} = 1.$$

Aufgabe 2

$$\begin{aligned} f_a'(x) &= (2x-4)e^{x-a} + (x^2-4x+5)e^{x-a} = (x-1)^2 e^{x-a}. \\ f_a''(x) &= 2(x-1)e^{x-a} + (x-1)^2 e^{x-a} = (x^2-1)e^{x-a}. \\ f_a'''(x) &= 2xe^{x-a} + (x^2-1)e^{x-a} = (x^2+2x-1)e^{x-a}. \end{aligned}$$

a) **Extremstellen:**

$$f_a^{'}(x) = 0 \Leftrightarrow (x-1)^2 e^{a-x} = 0 \Leftrightarrow (x-1) = 0 \Leftrightarrow x = 1.$$

Aus

$$f_a^{''}(1) = 0 \quad \text{und} \quad f_a^{'''}(1) = 2 \neq 0$$

folgt, dass bei $x = 1$ die Funktion f_a keine Extremstelle sondern einen Horizontalwendepunkt besitzt.

b) **Wendepunkte:**

$$f_a^{''}(x) = 0 \Leftrightarrow (x^2-1)e^{x-a} = 0 \Leftrightarrow (x^2-1) = 0 \Leftrightarrow x = 1 \quad \text{oder} \quad x = -1.$$

Aus

$$f_a^{'''}(-1) = -3 \neq 0$$

folgt, dass die Funktion f_a noch einen Wendepunkt bei $x = -1$ besitzt.

c)

$$\lim_{x \to +\infty} (x^2 - 4x + 5)e^{x-a} = (\infty \cdot \infty) = \infty.$$

$$\begin{aligned}
\lim_{x \to -\infty} (x^2 - 4x + 5)e^{x-a} = (\infty \cdot 0) &= \lim_{x \to -\infty} \frac{(x^2 - 4x + 5)}{e^{a-x}} = \frac{\infty}{\infty} \quad \text{L'Hospital} \\
&= \lim_{x \to -\infty} \frac{2x - 4}{-e^{a-x}} = \frac{\infty}{\infty} \quad \text{l'Hospital} \\
&= \lim_{x \to -\infty} \frac{2}{e^{a-x}} = \frac{2}{\infty} = 0.
\end{aligned}$$

Aufgabe 3

a) Das Taylorpolynom der Funktion $f(x)$ vom Grad 2 um den Punkt 0 ist

$$T_2(f, x, 0) = f(0) + f^{'}(0)\, x + \frac{1}{2} f^{''}(0)\, x^2$$

mit

$$\begin{aligned}
f(0) &= 2, \\
f^{''}(x) &= \frac{1}{3}(x+8)^{-\frac{2}{3}} \Rightarrow f^{'}(0) = \frac{1}{12}, \\
f^{'''}(x) &= -\frac{2}{9}(x+8)^{-\frac{5}{3}} \Rightarrow f^{''}(0) = -\frac{1}{144}.
\end{aligned}$$

Also

$$T_2(f, x, 0) = 2 + \frac{1}{12}x - \frac{1}{288}x^2.$$

b) i)

$$I_1 = \int\limits_0^a \frac{x}{e^{2x}}\ dx = \int\limits_0^a xe^{-2x}\ dx.$$

Eine partielle Integration mit

$$f(x) = x \text{ und } g^{'}(x) = e^{-2x}$$

liefert

$$\begin{aligned} I_1 &= -\frac{x}{2}e^{-2x}\Big|_0^a + \frac{1}{2}\int\limits_0^a e^{-2x}\ dx \\ &= -\frac{a}{2}e^{-2a} - \frac{1}{4}e^{-2x}\Big|_0^a \\ &= -\frac{a}{2}e^{-2a} - \frac{1}{4}e^{-2a} + \frac{1}{4}. \end{aligned}$$

(ii) Eine Integration durch Partialbruchzerlegung:

$$\begin{aligned} I_2 &= \lim_{b\to\infty}\int\limits_1^b \frac{dx}{x(x+1)}\ dx \\ &= \lim_{b\to\infty}\int\limits_1^b \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{x+1}\right)\ dx \\ &= \lim_{b\to\infty}(\ln|x| - \ln|x+1|)\Big|_1^b \\ &= \lim_{b\to\infty}\Big(\ln|b| - \ln|b+1|\Big) - \ln 1 + \ln 2 \\ &= \ln\left(\lim_{b\to\infty}\frac{b}{b+1}\right) + \ln 2 \\ &= \ln 1 + \ln 2 = \ln 2 \end{aligned}$$