KLAUSUR

Analysis
(Informatiker)

14.03.2017

Dr. habil. Sebastian Petersen
Dr. Anen Lakhal

Version mit Lösungsskizzen

Für jede Aufgabe gibt es 10 Punkte. Zum Bestehen der Klausur sollten 13 Punkte erreicht werden.

Aufgabe 1.

a) Man berechne die folgenden Grenzwerte:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n^2+n}{7n^2+(-1)^n}, \ \lim_{n\to\infty} \frac{n^2+1}{2n^2+\sqrt{n^3}}, \text{ und } \lim_{n\to\infty} \cos\left(\frac{2n-1}{3n^3}\right).$$

b) Beweisen Sie durch vollständige Induktion, dass $\sum\limits_{k=0}^{n} \frac{k+3}{2^k} = 8 - \frac{n+5}{2^n}$ für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt, und berechnen Sie dann den Grenzwert $\sum\limits_{k=0}^{\infty} \frac{k+3}{2^k}$.

Lösungsskizze zu Aufgabe 1.

a)
- $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{n^2+n}{7n^2+(-1)^n} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{1+n^{-1}}{7+(-1)^n n^{-2}} = \frac{1}{7}$.
- $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{n^2+1}{2n^2+\sqrt{n^3}} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{1+n^{-2}}{2+n^{-0.5}} = \frac{1}{2}$.
- $\lim_{n\to\infty} \cos(\frac{2n-1}{3n^3}) = \lim_{n\to\infty} \cos(\frac{2}{3n^2} - \frac{1}{3n^3}) = \cos(0) = 1$, wobei wir im vorletzten Schritt die Stetigkeit des Cosinus benutzt haben.

b) Behauptung: Es gilt $\sum\limits_{k=0}^{n} \frac{k+3}{2^k} = 8 - \frac{n+5}{2^n}$ für alle $n \in \mathbb{N}$.

Induktionsanfang: $\sum\limits_{k=0}^{0} \frac{k+3}{2^k} = \frac{0+3}{2^0} = 3$ und $8 - \frac{0+5}{2^0} = 3$, d.h. die zu zeigende Aussage ist für $n = 0$ richtig.

Induktionsschritt:

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{n+1} \frac{k+3}{2^k} &= \sum_{k=0}^{n} \frac{k+3}{2^k} + \frac{(n+1)+3}{2^{n+1}} \overset{(!)}{=} 8 - \frac{n+5}{2^n} + \frac{n+4}{2^{n+1}} = \\ &= 8 - \frac{2n+10}{2^{n+1}} + \frac{n+4}{2^{n+1}} = 8 - \frac{n+6}{2^{n+1}},\end{aligned}$$

wobei an der mit (!) gekennzeichneten Stelle die Induktionsannahme benutzt wurde. □

Nun sieht man, dass

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{k+3}{2^k} = \lim_{n\to\infty} 8 - \frac{n+5}{2^n} = 8$$

gilt.

Aufgabe 2.
Wir betrachten die Funktion $f : \mathbb{R} \setminus \{1\} \to \mathbb{R},\ f(x) = \frac{e^x}{x-1}$.

a) Hat f eine Nullstelle?

b) Bestimmen Sie die erste Ableitung f' von f.

c) Bestimmen Sie Lage und Art der lokalen Extrema von f.

d) Berechnen Sie $\lim\limits_{x\to 1, x<1} f(x)$, $\lim\limits_{x\to 1, x>1} f(x)$, $\lim\limits_{x\to -\infty} f(x)$ und $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)$.

e) Skizzieren Sie den ungefähren Verlauf des Graphen von f.

Lösungsskizze zu Aufgabe 2.

a) Nein.

b) $f'(x) = \frac{e^x(x-1)-e^x}{(x-1)^2} = \frac{e^x(x-2)}{(x-1)^2}$ für alle $x \in D = \mathbb{R} \setminus \{1\}$.

c) Offenbar ist $x_0 := 2$ die einzige Nullstelle von f' und somit der einzige Kandidat für ein Extremum. Es ist $f'(x) < 0$ für $x \in]1, 2[$, d.h. f ist in $]1, 2[$ streng monoton fallend. Es ist $f'(x) > 0$ für $x \in]2, \infty[$, d.h. f ist in $]2, \infty[$ streng monoton wachsend. Damit sieht man, dass in $x_0 = 2$ ein isoliertes lokales Minimum vorliegt; weitere lokale Extrema hat f nicht.

   Anmerkung: Alternativ kann man die stationäre Stelle x_0 mit Hilfe der zweiten Ableitung klassifizieren. (Dafür muss man f'' natürlich erst einmal berechnen, was ein gewisser Mehraufwand gegenüber dem hier geschilderten Weg ist.)

d)
- $\lim\limits_{x\to 1, x<1} f(x) = -\infty$. (Situation “$\frac{1}{0^-}$”.)
- $\lim\limits_{x\to 1, x>1} f(x) = \infty$. (Situation “$\frac{1}{0^+}$”.)
- $\lim\limits_{x\to -\infty} f(x) = 0$. (Situation “$\frac{0}{-\infty}$”.)
- $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to\infty} e^x = \infty$, wobei im vorletzten Schritt die Regel von de L’Hospital benutzt wurde.

e) Skizze machen!

Aufgabe 3.

a) Für die Funktion $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f(x) = \sin(x^2 - 4x + 3)$ berechne man f' und f'' und das Taylorpolynom 2. Ordnung von f im Entwicklungspunkt $x_0 = 1$.

b) Man berechne $\lim\limits_{x \to 0} \frac{e^{7x}-1}{\sin(3x)}$. (Hinweis: L'Hospital!)

c) Berechnen Sie die folgenden Integrale:

   (i) $\int 3x^2 \ln(x) dx,\ x > 0$. (Hinweis: Partielle Integration!)

   (ii) $\int\limits_0^{\pi^2} \frac{\cos(\sqrt{x})+1}{6\sqrt{x}} dx$. (Hinweis: Man substituiere $u = \sqrt{x}$.)

Lösungsskizze zu Aufgabe 3.

a) Es gilt

$$\begin{aligned} f(x) &= \sin(x^2 - 4x + 3), & f(1) &= 0, \\ f'(x) &= (2x-4)\cos(x^2 - 4x + 3), & f'(1) &= -2, \\ f''(x) &= 2\cos(x^2 - 4x + 3) - (2x-4)\sin(x^2 - 4x + 3), & f''(1) &= 2. \end{aligned}$$

Das gesuchte Taylorpolynom ist also

$$T(x) = f(1) + f'(1)(x-1) + \frac{f''(1)}{2}(x-1)^2 = -2(x-1) + (x-1)^2.$$

b)

$$\begin{aligned} \lim_{x \to 0} \tfrac{\exp(7x)-1}{\sin(3x)} &= \lim_{x \to 0} \tfrac{7\exp(7x)}{3\cos(3x)} = \\ &= \tfrac{7\exp(0)}{3\cos(0)} = \tfrac{7}{3}. \end{aligned}$$

(Es wurde die Regel von de L'Hospital benutzt.)

c) (i)

$$\begin{aligned} \int 3x^2 \ln(x) dx &= x^3 \ln(x) - \int x^3 x^{-1} dx = \\ &= x^3 \ln(x) - \int x^2 dx = \\ &= x^3 \ln(x) - \tfrac{1}{3}x^3 + C. \end{aligned}$$

   (ii) Substituiere $u = \sqrt{x}$, $du = \frac{dx}{2\sqrt{x}}$:

   $\int\limits_0^{\pi^2} \frac{\cos(\sqrt{x})+1}{6\sqrt{x}} dx = \frac{1}{3}\int_0^{\pi} (\cos(u) + 1) du = \frac{1}{3}[\sin(u) + u]_0^{\pi} = \frac{\pi}{3}.$