KLAUSUR

Analysis (E-Techniker/Mechatroniker/W-Ingenieure)

01.09.2011

(Wolfram Koepf)

Name:	Vorname:	Matr.–Nr.:	Studiengang:	Versuch–Nr.:

Unterschrifft:

Für jede Aufgabe gibt es 10 Punkte. Zum Bestehen der Klausur sollten 27 Punkte erreicht werden.

1)	2)	3)	4)	5)	6)

Punkte:	Note:

Fangen Sie für jede Aufgabe ein neues Blatt an.
Beschreiben Sie nur die Vorderseite der Blätter.
Geben Sie alle Rechenschritte an!

1. (a) Gegeben sei die Folge definiert durch $v_{n+1} = \frac{1}{4}(4 + v_n^2), n \in \mathbb{N}, v_0 = 0$.
   (i) Untersuchen Sie die Monotonie der Folge v_n.
   (ii) v_n ist durch 3 beschränkt. Berechnen Sie den Grenzwert von v_n.

   (b) Berechnen Sie den Grenzwert der folgenden Folge

$$v_n = \frac{4n^2 - 1}{\sqrt[7]{n^{14} - 3n} + n^2} \ .$$

   (c) Beweisen Sie durch vollständige Induktion, dass

$$\sum_{k=1}^{n} k^3 = \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2 \ .$$

2. (a) Finden Sie alle Nullstellen des Polynoms

$$p(x) = -2x^3 + x^2 + 2x - 1$$

   und schreiben Sie $p(x)$ in faktorisierter Form.

   (b) Gegeben sei die Funktion

$$f(x) = \frac{3x^2 - 4x + 1}{-2x^3 + x^2 + 2x - 1} \ .$$

   (i) Zeigen Sie, dass

$$f(x) = \frac{3x - 1}{(-2x+1)(x+1)}, \quad x \neq 1 \ .$$

   (ii) Zeigen Sie, dass $x_0 = 1$ eine hebbare Stelle ist (d.h. $\lim_{x \to 1} f(x) \neq \infty$) und bestimmen Sie den Wert, durch welchen $f(x)$ stetig ergänzt werden kann.

   (iii) Partialbruchzerlegung:
   Bestimmen Sie $a, b \in \mathbb{R}$, so dass

$$\frac{3x - 1}{(-2x+1)(x+1)} = \frac{a}{(-2x+1)} + \frac{b}{(x+1)} \ .$$

(iv) Bestimmen Sie eine Stammfunktion

$$\int f(x)dx \qquad \text{von} \qquad f(x)\ .$$

3. (a) Geben Sie die Taylorreihe der Funktion

$$f(x) = \frac{\cosh(x^3) - 1}{x^4}$$

und leiten Sie heraus das Taylorpolynom $T(f, x, 0, 10)$ zehnten Grades um $x_0 = 0$. Hinweis: $\cosh(x) = \sum\limits_{k=0}^{\infty} \frac{x^{2k}}{(2k)!}$

(b) Berechnen Sie den folgenden Grenzwert:

$$\lim_{x \to 0} \frac{x^2 e^x}{\sin^2(x)}\ .$$

(c) Gegeben sei die Funktion

$$f(x) = e^{\arcsin(x)}$$

Bestimmen Sie eine Stammfunktion

$$\int e^{\arcsin(x)} dx$$

von $f(x)$ mit der Substitution $t = \arcsin(x)$.

4. (a) Sei $f(x, y, z) = 2x^3 - 5y + 2z^2$ und $\vec{e}$ der zu $(0, -2, 1)$ gehörige Einheitsvektor.
Berechnen Sie die Richtungsableitung

$$\frac{\partial f}{\partial \vec{e}}(x, y, z)$$

sowie die Richtung des stärksten Anstiegs der Funktion $f(x, y, z)$ im Punkt $P = (3, -1, 2)$.

(b) Berechnen Sie das Volumen des folgenden Teilgebiets $D \subset \mathbb{R}^3$

$$D := \{(x, y, z) \mid -z \le x \le 1, 0 \le z \le 2y + 1, 0 \le y \le 1\}\ .$$

5. Gegeben sei die Funktion

$$f(x,y) = x^2 + y^2 \; .$$

Bestimmen Sie die Extremstellen der Funktion $f(x,y)$ unter der Nebenbedingung

$$g(x,y) = x^4 + y^4 - 2 = 0$$

sowie die dortigen Funktionswerte, anschließend leiten Sie hieraus die Maximalstellen bzw. Minimalstellen her.

6. (a) Gegeben seien die Funktion

$$f(x,y) = x$$

und die Punkte $A = (-2,0)$, $B = (1,2)$ und $C = (2,0)$.
Integrieren Sie die Funktion f über das Innere des Dreiecks ABC.

(b) Gegeben sei das Gebiet des $\mathbb{R}^2$, das im ersten Quadranten liegt

$$D := \left\{ (x,y) \,\middle|\, \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \leq 5 \;, x \geq 0, y \geq 0 \right\}$$

Benutzen Sie Ellipsenkoordinaten, um das folgende Integral

$$\int\limits_D y \sqrt{\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}} \, d(x,y)$$

zu berechnen.
Hinweis: Parametrisierung der Ellipsenkoordinaten: $x = a\, r \cos(\theta), y = b\, r \sin(\theta)$, wobei die Determinante der Jacobi-Matrix $|J| = a\, b\, r$ ist.

Lösungen

1. (a) Folge $v_{n+1} = \frac{1}{4}(4 + v_n^2), n \in \mathbb{N}, v_0 = 0.$

   (i) Monotonie:

$$v_{n+1} - v_n = \frac{1}{4}(4 + v_n^2) - v_n = \frac{1}{4}(v_n^2 - 4v_n + 4) = \frac{1}{4}(v_n - 2)^2 > 0 \;.$$

   $\Longrightarrow v_n$ ist monoton steigend.

   (ii) v_n ist durch 3 beschränkt. Berechnung des Grenzwertes von v_n. Sei l dieser Grenzwert.

$$\lim_{n\to\infty} v_{n+1} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{4}(4 + v_n^2) \Longleftrightarrow l = \frac{1}{4}(4 + l^2) \Longleftrightarrow l^2 - 4l - 4 = 0 \Longleftrightarrow l = 2 \;.$$

$$\Longrightarrow \lim_{n\to\infty} v_n = 2.$$

(b) Grenzwert der Folge

$$v_n = \frac{4n^2 - 1}{\sqrt[7]{n^{14} - 3n} + n^2} \;.$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{4n^2 - 1}{\sqrt[7]{n^{14} - 3n} + n^2} = \left(\frac{\infty}{\infty}\right) \;.$$

$$v_n = \frac{4n^2 - 1}{\sqrt[7]{n^{14} - 3n} + n^2} = \frac{4n^2 - 1}{\sqrt[7]{n^{14}(1 - 3\frac{1}{n^{13}})} + n^2} = \frac{4n^2 - 1}{\sqrt[7]{n^{14}}\sqrt[7]{(1 - 3\frac{1}{n^{13}})} + n^2}$$

$$\frac{n^2(4 - \frac{1}{n^2})}{n^2(\sqrt[7]{(1 - 3\frac{1}{n^{13}})} + 1)} = \frac{4 - \frac{1}{n^2}}{\sqrt[7]{(1 - 3\frac{1}{n^{13}})} + 1} \Longrightarrow \lim_{n\to\infty} v_n = \frac{4}{1 + 1} = 2$$

(c) Beweis durch Induktion, dass

$$\sum_{k=1}^{n} k^3 = \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2 \;.$$

   (i) Induktionsanfang:

$$n = 1 : \sum_{k=1}^{1} k^3 = 1^3 = 1 = \left(\frac{1(1+1)}{2}\right)^2 ;.$$

(ii) Induktionsvoraussetzung:

$$\sum_{k=1}^{n} k^3 = \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2 .$$

(iii) Induktionsschluss:

$$\sum_{k=1}^{n+1} k^3 = \left(\frac{(n+1)(n+2)}{2}\right)^2 .$$

$$\sum_{k=1}^{n+1} k^3 = \sum_{k=1}^{n} k^3 + \sum_{k=n+1}^{n+1} k^3 = \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2 + (n+1)^3 =$$

$$\frac{n^2(n+1)^2}{3} + (n+1)^3 = \frac{1}{4}(n+1)^2(n^2+4(n+1)) = \frac{1}{4}(n+1)^2(n^2+4n+4) =$$

$$\frac{1}{4}(n+1)^2(n+2)^2 = \left(\frac{(n+1)(n+2)}{2}\right)^2 .$$

2. (a) Nullstellen des Polynoms

$$p(x) = -2x^3 + x^2 + 2x - 1 .$$

$p(1) = -2 + 1 + 2 - 1 = 0 \Longrightarrow x_1 = 1$ ist eine Nullstelle von $p(x)$.
Durch Polynomdivision erhalten wir $p(x) : (x-1) = -2x^2 - x + 1$.
Anschließend erhält man mit der $pq-$ Formel $x_2 = -1$ und $x_3 = \frac{1}{2}$ als Nullstellen von $-2x^2 - x + 1$. $\Longrightarrow x_1 = 1, x_2 = -1$ und $x_3 = \frac{1}{2}$ sind die Nullstellen von $p(x)$.
Faktorisierte Form
$p(x) = -2(x - \frac{1}{2})(x-1)(x+1) = (-2x+1)(x-1)(x+1)$.

(b)

$$f(x) = \frac{3x^2 - 4x + 1}{-2x^2 + x^2 + 2x - 1} .$$

(i) Man zeige, dass

$$f(x) = \frac{3x - 1}{(-2x+1)(x+1)} .$$

$3x^2 - 4x + 1$ lässt sich faktorisieren als $(3x-1)(x+1)$, somit ist

$$f(x) = \frac{3x^2 - 4x + 1}{-2x^2 + x^2 + 2x - 1} = \frac{(3x-1)(x+1)}{(-2x+1)(x-1)(x+1)} = \frac{3x-1}{(-2x+1)(x+1)} .$$

(ii) Man zeige, dass $x_0 = 1$ eine hebbare Stelle ist.

$$\lim_{x\to 1} f(x) = \lim_{x\to 1} \frac{3x-1}{(-2x+1)(x+1)} = \frac{3\cdot 1 - 1}{(-2\cdot 1+1)(1+1)} = -1 \ .$$

f kann an $x_0 = 1$ durch den Wert -1 ergänzt werden.

(iii) Partialbruchzerlegung:
Man bestimme a, b und c so, dass

$$\frac{3x-1}{(-2x+1)(x+1)} = \frac{a}{(-2x+1)} + \frac{b}{(x+1)} \ .$$

$$\begin{aligned} \frac{3x-1}{(-2x+1)(x+1)} &= \frac{a}{(-2x+1)} + \frac{b}{(x+1)} \ . \\ &= \frac{a(x+1)+b(-2x+1)}{(-2x+1)(x+1)} \\ &= \frac{x(a-2b)+(a+b)}{(-2x+1)(x+1)} \end{aligned}$$

Mit Koeffizientenvergleich erhält man

$$\left\{ \begin{array}{l} a - 2b = 3 \\ a + b = -1 \end{array} \right. \Longrightarrow a = \frac{1}{3}, b = -\frac{4}{3} \ .$$

(iv) Man bestimme

$$\int f(x)dx \ .$$

$$\int f(x)dx = \int \frac{3x-1}{(-2x+1)(x+1)}dx = \int \frac{\frac{1}{3}}{(-2x+1)} + \frac{-\frac{4}{3}}{(x+1)}dx$$
$$= -\frac{1}{6}\ln|-2x+1| - \frac{4}{3}\ln|x+1| + \text{Const.}$$

3. (a) Man gebe die Taylorreihe der Funktion

$$f(x) = \frac{\cosh(x^3)-1}{x^4} \quad \text{Hinweis : } \cosh(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^{2k}}{(2k)!}$$

$$\cosh(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^{2k}}{(2k)!} \Longrightarrow \cosh(x^3) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(x^3)^{2k}}{(2k)!} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(x)^{6k}}{(2k)!}$$

$$f(x) = \frac{\cosh(x^3) - 1}{x^4} = \frac{\sum\limits_{k=0}^{\infty} \frac{(x)^{6k}}{(2k)!} - 1}{x^4} = \frac{\left(1 + \frac{x^6}{2} + \frac{x^{12}}{4!} + \frac{x^{18}}{6!} + \frac{x^{24}}{8!} + \cdots\right) - 1}{x^4}$$
$$= \frac{x^2}{2!} + \frac{x^8}{4!} + \frac{x^{14}}{6!} + \frac{x^{20}}{8!} + \cdots = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{x^{6k-4}}{(2k)!}$$

Taylorpolynom zehnten Grades:

$$T(f, x, 0, 10) = \frac{x^2}{2!} + \frac{x^8}{4!} + o(x^{10}) \ .$$

(b) Berechnung von

$$\lim_{x\to 0} \frac{x^2 e^x}{\sin^2(x)} \ .$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{x^2 e^x}{\sin^2(x)} = \lim_{x\to 0} \left[\left(\frac{x}{\sin(x)} \right)^2 \cdot e^x \right] = 1^2 \cdot 1 = 1 \ .$$

(c) Man bestimme

$$\int e^{\arcsin(x)} dx$$

mit der Substitution $t = \arcsin(x)$.

$$t = \arcsin(x) \Longleftrightarrow \sin(t) = x \Longrightarrow \cos(t)dt = dx$$
$$I = \int e^{\arcsin(x)} dx = \int e^t \cos(t) dt$$

Mit partieller Integration haben wir:

$$\left\{ \begin{array}{r} u = e^t \Longrightarrow u' = e^t \\ v' = \cos(t) \Longrightarrow v = \sin(t) \end{array} \right. \Longrightarrow I = e^t \sin(t) - \int e^t \sin(t) dt$$

$$\left\{ \begin{array}{r} u_1 = e^t \Longrightarrow u_1' = e^t \\ v_1' = \sin(t) \Longrightarrow v_1 = -\cos(t) \end{array} \right. \Longrightarrow I = e^t \sin(t) - \left(-e^t \cos(t) + \int e^t \cos(t) \right)$$

$$\Longrightarrow I = e^t \sin(t) + e^t \cos(t) - I \Longrightarrow 2I = (\sin(t) + \cos(t)) e^t$$

$$\Longrightarrow I = \frac{1}{2}(\sin(t) + \cos(t)) e^t. \quad \text{Rücksubstitution liefert}$$

$$I = \int e^{\arcsin(x)} dx = \frac{1}{2}(x + \cos(\arcsin(x))) e^{\arcsin(x)} + \text{const.}$$

4. (a) Sei $f(x,y,z) = 2x^3 - 5y + 2z^2$ und $\vec{e}$ der zu $(0,-2,1)$ gehörige Einheitsvektor.

Man berechne die Richtungsableitung

$$\frac{\partial f}{\partial \vec{e}}(x,y,z)$$

$$\frac{\partial f}{\partial \vec{e}}(x,y,z) = \mathrm{grad}(f) \cdot \vec{e}^T \quad \text{mit} \quad \vec{e} = \frac{(0,-2,1)}{||(0,-2,1)||} = \frac{\sqrt{5}}{5}(0,-2,1) \ .$$

und $\quad \mathrm{grad}(f) = (6x^2, -5, 4z) \Longrightarrow \dfrac{\partial f}{\partial \vec{e}}(x,y,z) = \dfrac{\sqrt{5}}{5}(6x^2,-5,4z) \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$

$$\Longrightarrow \frac{\partial f}{\partial \vec{e}}(x,y,z) = \frac{\sqrt{5}}{5}(10 + 4z) \ .$$

Man berechne die Richtung des stärksten Anstiegs der Funktion $f(x,y,z)$ im Punkt $P = (3,-1,2)$.

Sei $\vec{e_p}$ dieser Anstieg.

$$\vec{e_p} = \frac{\mathrm{grad}\, f(p)}{||\,\mathrm{grad}\, f(p)||} = \frac{(6 \cdot 3^2, -5, 4 \cdot 2)}{||(6 \cdot 3^2, -5, 4 \cdot 2)||} = \frac{\sqrt{3005}}{3005}(54,-5,8) \ .$$

(b) Berechnen Sie das Volumen des folgenden Teilgebiets $D \subset \mathbb{R}^3$

$$D := \{(x,y,z) \,|\, -z \leq x \leq 1, 0 \leq z \leq 2y+1, 0 \leq y \leq 1\} \ .$$

Sei v dieses Volumen.

$$v = \int_0^1 \left(\int_0^{2y+1} \left(\int_{-z}^1 1 dx \right) dz \right) dy = \int_0^1 \left(\int_0^{2y+1} (1+z)\, dz \right) dy =$$

$$\int_0^1 \left(2y + 1 - \frac{1}{2}(2y+1)^2 \right) dy = \int_0^1 \left(2y^2 + 4y + \frac{3}{2} \right) dy = \frac{25}{6} VE \ .$$

5. Man bestimme die Extremstellen der Funktion $f(x,y) = x^2 + y^2$ unter der Nebenbedingung

$$g(x,y) = x^4 + y^4 - 2 = 0 \ .$$

Dies sind die Lösungen des Gleichungssystems

$$\begin{array}{c} x^4 + y^4 - 2 = 0 \\ \mathrm{grad}(f(x,y) + \lambda\, \mathrm{grad}(g(x,y) = \vec{0} \end{array} \iff \begin{array}{c} x^4 + y^4 - 2 = 0 \\ (2x, 2y) + \lambda(4x^3, 4y^3) = (0,0) \end{array}$$

$$\iff \begin{array}{cc} x^4 + y^4 - 2 = 0 & (1) \\ 2x + \lambda 4x^3 = 0 & (2) \\ 2y + \lambda 4y^3 = 0 & (3) \end{array} \quad (2)\cdot(y^3) \quad \text{und} \quad (3)\cdot(-x^3) \iff \begin{array}{c} 2xy^3 + 4\lambda x^3 y^3 = 0 \\ -2x^3 y - 4\lambda x^3 y^3 = 0 \end{array}$$

Wenn wir die beiden obigen Gleichungen addieren, erhalten wir die Gleichung $2xy^3 - 2x^3y = 0 \quad (4)$. Somit erhalten wir das Gleichungssystem

$$\iff \begin{array}{cc} x^4 + y^4 - 2 = 0 & (1) \\ 2xy^3 - 2x^3y = 0 & (4) \end{array}$$

$$(4) \iff 2xy(y^2 - x^2) = 0 \iff x = 0 \quad \vee \quad y = 0 \quad \vee \quad y^2 = x^2 (d.h \quad y = x \quad \vee \quad y = -x).$$

(i) Falls $x = 0$

$$(1) \iff y^4 - 2 = 0 \iff y = \pm\sqrt[4]{2} \implies A = (0, -\sqrt[4]{2}) \quad B = (0, \sqrt[4]{2}) \ .$$

(ii) Falls $y = 0$

$$(1) \iff x^4 - 2 = 0 \iff x = \pm\sqrt[4]{2} \implies C = (-\sqrt[4]{2}, 0) \quad D = (\sqrt[4]{2}, 0) \ .$$

(iii) Falls $y = x$

$$(1) \iff 2x^4 - 2 = 0 \iff x = \pm 1 \implies E = (1,1) \quad F = (-1,-1) \ .$$

(vi) Falls $y = -x$

$$(1) \iff 2x^4 - 2 = 0 \iff x = \pm 1 \implies G = (-1,1) \quad H = (1,-1) \ .$$

Die Punkte A, B, C, D, E, F, G und H sind die gesuchten Extremstellen.

Berechnung der Funktionswerte an diesen Punkten.

$$f(A) = 0^2 + (-\sqrt[4]{2})^2 = \sqrt{2} = f(B) = f(C) = f(D) .$$

$$f(E) = 1^2 + 1^2 = 2 = f(F) = f(G) = f(H) .$$

Herleitung der Maximalstellen bzw. Minimalstellen.

Da $f(A) < f(E)$, dann sind A, B, C und D die Minimalstellen und E, F, G, H die Maximalstellen der Funktion $f(x, y)$.

6. (a) $A = (-2, 0)$, $B = (1, 2)$ und $C = (2, 0)$.
Man integriere die Funktion $f(x, y) = x$ über das Innere des Dreiecks ABC.

$$\int f(x,y)_{ABC} = \int f(x,y)_{ABI} + \int f(x,y)_{IBC} \quad \text{mit} \quad I = (0,1) .$$

Die Bestimmung der Gleichung der Geraden $(AB$ und (BC) ergibt

$$\begin{array}{rl} (AB): & y = \frac{2}{3}x + \frac{4}{3} \\ (BC): & y = -2x + 4 \end{array}$$

$$\int f(x,y)_{ABC} = \int_{-2}^{1} \left(\int_{0}^{\frac{2}{3}x+\frac{4}{3}} x dy \right) dx + \int_{1}^{2} \left(\int_{0}^{-2x+4} x dy \right) dx$$

$$= \int_{-2}^{1} x(\frac{2}{3}x + \frac{4}{3})dx + \int_{1}^{2} x(-2x+4)dx = \frac{4}{3}VE .$$

(b) Gegeben sei das Gebiet des $\mathbb{R}^2$, das im ersten Quadranten liegt

$$D := \left\{ (x,y) \,\middle|\, \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \leq 5 , x \geq 0, y \geq 0 \right\}$$

Benutzen Sie Ellipsenkoordinaten, um das folgende Integral

$$\int_D y\sqrt{\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}}\,d(x,y)$$

zu berechnen.
Hinweis: Parametrisierung der Ellipsenkoordinaten: $x = a\,r\cos(\theta), y = b\,r\sin(\theta)$, wobei die Determinante der Jacobi-Matrix $|J| = a\,b\,r$ ist.

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2} \leq 5 \Longleftrightarrow \frac{(a\,r\cos(\theta))^2}{a^2}+\frac{(b\,r\sin(\theta))^2}{b^2} \leq 5 \Longleftrightarrow r^2(\cos^2(\theta)+\sin^2(\theta)) \leq 5$$

$$\Longleftrightarrow r \leq \sqrt{5} \quad \text{und} \quad D := \left\{(r,\theta)\,\middle|\,0 \leq r \leq \sqrt{5}\,, 0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}\right\}\ .$$

$$\int_D y\sqrt{\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}}\,d(x,y) = \int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_0^{\sqrt{5}} b\sin(\theta)\sqrt{\frac{(a\,r\cos(\theta))^2}{a^2}+\frac{(b\,r\sin(\theta))^2}{b^2}}|J|drd\theta$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(\int_0^{\sqrt{5}} ab^2r^3\sin(\theta)dr\right)d\theta = \int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(ab^2\frac{\sqrt{5}^4}{4}\sin(\theta)\right)d\theta = ab^2\frac{\sqrt{5}^4}{4}FE\ .$$