Klausur Diskrete Strukturen I

(Informatiker)

15. September 2009

(Hans-Georg Rück)

Aufgabe 1 (4 Punkte):

In einem Unternehmen werden zwei Produkte A und B hergestellt. Der Anteil an der Gesamtproduktion beträgt 80% bei A und 20% bei B. Das bewährte Produkt A hat bei der Produktion eine Ausschussrate von 1%, daran soll nichts geändert werden. Wie groß kann die Ausschussrate von B höchstens sein, um eine Gesamtausschussrate des Unternehmens von 2% nicht zu übersteigen?

Aufgabe 2 (6 Punkte):

Es sei $\Omega = \mathbb{N} = \{1, 2, 3, \ldots\}$. Auf Ω sei die Funktion $p : \Omega \to [0, 1]$ mit $p(n) = 2^{-n}$ für alle $n \in \mathbb{N}$ gegeben.

a) Zeigen Sie, dass durch die Vorschrift $P(A) = \sum_{\omega \in A} p(\omega)$ für alle $A \subseteq \Omega$ eine Wahrscheinlichkeitsverteilung P auf Ω definiert wird.

b) Betrachten Sie die Zufallsvariable $X : \Omega \to \mathbb{R}$ mit $X(n) = n$. Berechnen Sie den Erwartungswert $E(X)$ und zeigen Sie, dass

$$E(X) = \sum_{n=1}^{\infty} P(X \geq n)\,.$$

Aufgabe 3 (5 Punkte):

Finden Sie eine explizite Lösungsformel für die Folgenglieder x_n, die rekursiv gegeben sind durch

$$x_n = 3\,x_{n-1} + 4\,x_{n-2} - 12\,x_{n-3} \text{ für } n \geq 3$$

mit den Anfangswerten

$$x_0 = 3\,,\ x_1 = 3\,,\ x_2 = 17\,.$$

Berechnen Sie explizit x_5.

Aufgabe 4 (6 Punkte):

Es sei Ω die Menge aller Abbildungen

$$f : \{a, b, c, d, e\} \to \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}.$$

a) Berechnen Sie die Anzahl der Elemente von Ω.

b) Charakterisieren Sie alle Elemente $f \in \Omega$, deren Bildmenge $f(\{a, b, c, d, e\})$ aus genau 5 Elementen besteht. Wie viele solcher f gibt es?

c) Berechnen Sie die Anzahl der $f \in \Omega$ mit $|f(\{a, b, c, d, e\})| = 1$.

Aufgabe 5 (4 Punkte):

a) Berechnen Sie die Anzahl der Permutationen auf der Menge $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, die die Zahl 4 fest lassen. Begründen Sie Ihre Antwort!

b) Schreiben Sie die Permutation $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 4 & 3 & 2 & 5 & 1 \end{pmatrix}$ als Hintereinanderausführung von disjunkten Zykeln.

Lösungen:

Aufgabe 1: Es ist $P(A) = \frac{4}{5}$ und $P(B) = \frac{1}{5}$. Mit C wollen wir das Ereignis „Ausschuss“bezeichnen, dann gilt $P(C|A) = \frac{1}{100}$. Gesucht ist $P(C|B)$, wenn $P(C)$ höchstens $\frac{2}{100}$ ist. Der Satz von der totalen Wahrscheinlichkeit liefert

$$P(C) = P(C|A) \cdot P(A) + P(C|B) \cdot P(B) \leq \frac{2}{100}.$$

Also $\frac{1}{100} \cdot \frac{4}{5} + P(C|B) \cdot \frac{1}{5} \leq \frac{2}{100}$, und dann $P(C|B) \leq \frac{6}{100}$. Somit darf die Aussschussrate von B höchstens 6% betragen.

Aufgabe 2: a) Man sieht sofort, dass $P(\emptyset) = 0$ und $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$, falls $A \cap B = \emptyset$. Es bleibt zu zeigen, dass $P(\Omega) = 1$, dazu rechnet man
$P(\Omega) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} 2^{-n} = (\sum\limits_{n=0}^{\infty} 2^{-n}) - 1 = \dfrac{1}{1 - 2^{-1}} - 1 = 2 - 1 = 1.$

b) Wie berechnen $E(X) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} n \cdot 2^{-n}$. Das machen wir so (siehe Vorlesung):
Betrachte die geometrische Reihe $\sum\limits_{n=0}^{\infty} q^n = \dfrac{1}{1 - q}$ und leite nach q ab.

Man erhält $\sum_{n=1}^{\infty} n \cdot q^{n-1} = \dfrac{1}{(1-q)^2}$. Hieraus folgt sofort $\sum_{n=1}^{\infty} n \cdot q^n = \dfrac{q}{(1-q)^2}$. Jetzt setzten wir $q = \dfrac{1}{2}$ ein: $\sum_{n=1}^{\infty} n \cdot 2^{-n} = 2$. Also gilt $E(X) = 2$.

Andererseits rechnen wir $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} P(X \geq n) = \sum_{n=1}^{\infty} (\sum_{k=n}^{\infty} 2^{-k}) = \sum_{n=1}^{\infty} (2^{-n} \frac{1}{1-2^{-1}}) =$ $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} 2 \cdot 2^{-n} = 2\,(\frac{1}{1-2^{-1}} - 1) = 2\,(2-1) = 2$. Also sind beide Ausdrücke gleich.

Aufgabe 3: Die Rekursion $x_n = 3\,x_{n-1} + 4\,x_{n-2} - 12\,x_{n-3}$ hat das charakteristische Polynom $x^3 - 3\,x^2 - 4\,x + 12$. Wir raten eine Nullstelle dieses Polynoms aus der Teilermenge von 12: $\lambda_1 = 2$. Nun dividieren wir und erhalten $x^3 - 3\,x^2 - 4\,x + 12 = (x-2)\,(x^2 - x - 6)$. Deshalb sind die anderen Nullstellen gleich $\lambda_{2/3} = \frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{1}{4} + 6} = \frac{1}{2} \pm \frac{5}{2}$; also $\lambda_2 = 3$ und $\lambda_3 = -2$. Somit erhält man $x_n = a \cdot 2^n + b \cdot 3^n + c \cdot (-2)^n$.
Die Anfangswerte liefern das lineare Gleichungssystem

$$\begin{aligned} 3 &= a + b + c \\ 3 &= 2a + 3b - 2c \\ 17 &= 4a + 9b + 4c\,. \end{aligned}$$

Löst man dies mit dem Gauß-Algorithmus, so erhält man $a = 1, b = 1, c = 1$ und daher $x_n = 2^n + 3^n + (-2)^n$. Für $n = 5$ rechnet man $x_5 = 2^5 + 3^5 + (-2)^5 = 3^5 = 243$.

Aufgabe 4: a) Jedem Element aus $\{a,\, b,\, c,\, d,\, e\}$ kann man jedes Element von $\{0,\, 1, ...,\, 9\}$ zuordnen. Deshalb gilt $|\Omega| = 10^5$.

b) Die f mit $|f(\{a,\, b,\, c,\, d,\, e\})| = 5$ sind genau die injektiven Abbildungen. Davon gibt es $10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 = \binom{10}{5} 5\,! = 30240$ viele, denn für $f(a)$ hat man 10 Möglichkeiten, für $f(b)$ dann noch 9, usw.

Aufgabe 5: a) Wenn die Zahl 4 festgehalten wird, werden lediglich die Elemente $\{1,\, 2,\, 3,\, 5,\, 6\}$ permutiert. Davon gibt es (beachte, es sind 5 Elemente) $5\,! = 120$ Permutationen.

b) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 4 & 3 & 2 & 5 & 1 \end{pmatrix} = (1\;4\;5) \cdot (2\;3)$.