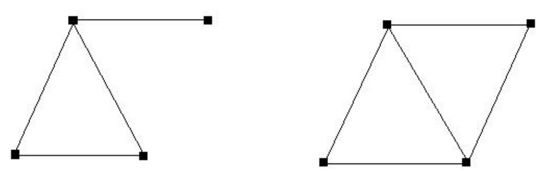
Klausur Diskrete Strukturen II

(Informatiker)

8. September 2009

(Hans-Georg Rück)

Aufgabe 1 (6 Punkte): In dieser Aufgabe betrachten wir zusammenhängende, planare (oder plättbare) Graphen, deren Flächen nur aus Dreiecken bestehen. So sind z.B.



zwei verschiedene solche Graphen mit 4 Knoten.

a) Bestimmen Sie alle (!) zusammenhängenden, planaren Graphen, deren Flächen nur aus Dreiecken bestehen, mit 5 Knoten. Erklären Sie dabei, nach welchen Kriterien Sie Ihre Liste erstellen.

b) Gibt es zusammenhängende, planare Graphen, deren Flächen nur aus Dreiecken bestehen, mit 20 Knoten, 28 Kanten und 12 Flächen?

(Vergessen Sie nicht, Ihre Antwort zu begründen. Antworten ohne Begründung werden nicht gewertet.)

Aufgabe 2 (7 Punkte): a) Gibt es einen Graphen $G = (V, E)$ auf einer vierelementigen Knotenmenge $V = \{v_1, v_2, v_3, v_4\}$ mit den Graden $\deg(v_1) = 1$, $\deg(v_2) = 2$, $\deg(v_3) = 2$, $\deg(v_4) = 3$?

b) Gibt es einen Graphen $G = (V, E)$ mit einer fünfelementigen Knotenmenge $V = \{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5\}$ mit den Graden $\deg(v_1) = 2$, $\deg(v_2) = 3$, $\deg(v_3) = 3$, $\deg(v_4) = 4$, $\deg(v_5) = 5$?

c) Ist der vollständige Graph K_{12} mit 12 Knoten eulersch?

d) Ist der vollständige bipartite Graph $K_{12,24}$ eulersch?

(Auch hier sei noch einmal erwähnt, dass wie immer Antworten ohne Begründung nicht gewertet werden.)

Aufgabe 3 (9 Punkte):

a) Lösen Sie die Kongruenz $12 \cdot x \equiv 75 \mod 125$. Sollte es keine Lösung geben, begründen Sie dies.

b) Lösen Sie die Kongruenz $20 \cdot x \equiv 81 \mod 125$. Sollte es keine Lösung geben, begründen Sie dies.

c) Lösen Sie die Kongruenz $15 \cdot x \equiv 35 \mod 125$. Sollte es keine Lösung geben, begründen Sie dies.

d) Berechnen Sie alle (!) $a, b \in \mathbb{Z}$ mit

$$21 \cdot a + 35 \cdot b = 14\,.$$

Aufgabe 4 (6 Punkte): Betrachten Sie die Menge

$$(\mathbb{Z}/12\,\mathbb{Z})^* = \{\bar{a} \in \mathbb{Z}/12\,\mathbb{Z} \mid \text{ es gibt } \bar{b} \in \mathbb{Z}/12\,\mathbb{Z} \text{ mit } \bar{a} \cdot \bar{b} = \bar{1}\}\,.$$

a) Zeigen Sie, dass $(\mathbb{Z}/12\,\mathbb{Z})^*$ mit der Multiplikation als Verknüpfung eine abelsche Gruppe ist.

b) Berechnen Sie alle Elemente von $(\mathbb{Z}/12\,\mathbb{Z})^*$.

c) Ist die Gruppe $(\mathbb{Z}/12\,\mathbb{Z})^*$ zyklisch? Begründung!

Aufgabe 5 (4 Punkte): Auf der Menge

$$M = \{m \in \mathbb{N} \mid m \text{ teilt } 12\}$$

aller Teiler von 12 betrachte man die Verknüpfungen

$$\begin{aligned} &\oplus \quad \text{mit} \quad m \oplus n = \text{kgV}(m,n)\,, \\ &\odot \quad \text{mit} \quad m \odot n = \text{ggT}(m,n)\,, \\ &\neg \quad \text{mit} \quad \neg\, m = \frac{12}{m}\,. \end{aligned}$$

Ist $(M, \oplus, \odot, \neg)$ eine boolsche Algebra? Begründen Sie Ihre Antwort.

Lösungen:

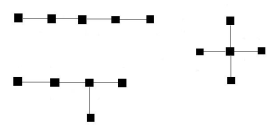
Aufgabe 1: In einem zusammenhängenden, planaren Graph gilt die Eulersche Formel: $v - e + g = 2$, wobei v die Anzahl der Knoten, e die Anzahl der Kanten und g die Anzahl der Gebiete ist. Dabei wird das Außengebiet mitgezählt, d.h. bei f Flächen, die begrenzt sind, hat man $g = f + 1$ Gebiete.

a) Bei $v = 5$ Knoten hat man höchstens $\frac{5\cdot 4}{2} = 10$ Kanten, somit gilt:

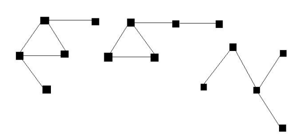
$$g = e - v + 2 \leq 10 - 5 + 2 = 7.$$

Der Fall $e = 10$, $g = 7$ ergibt den vollständigen Graph K_5, der nicht plättbar ist.
Wir ordnen die Graphen nach der Anzahl der Dreiecksflächen:

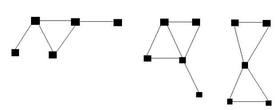
1) kein Dreieck:



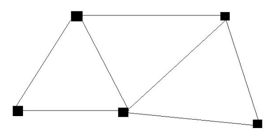
2) 1 Dreieck:



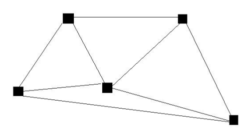
3) 2 Dreiecke:



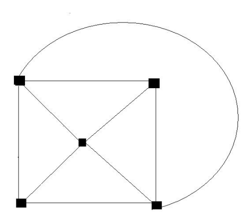
4) 3 Dreiecke:



5) 4 Dreiecke:

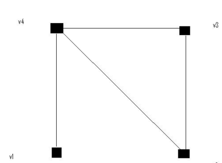


6) 5 Dreiecke:



b) Die Existenz eines solchen Graphen widerspricht der Eulerformel; aus $v = 20\,,\ e = 28$ und $g = 12 + 1 = 13$ folgt $v - e + g = 5 \neq 2$.

Aufgabe 2: a) ja, wir zeichnen einen solchen Graph



b) Gäbe es einen solchen Graph, dann wäre

$$\sum_v deg\,(v) = 2\,+3\,+3\,+\,4\,+\,5 = 17\,.$$

Das geht nicht, da die Summe alle Grade immer eine gerade Zahl ist. Also existiert ein solcher Graph nicht. (Außerdem geht $deg\,(v_5) = 5$ nicht, da $deg\,(v_2) \leq 4$ sein muss.)

c) Beim vollständigen Graph K_{12} hat jeder Knoten den Grad 11. Ein Graph ist genau dann eulersch, wenn alle Grade gerade sind. Somit ist K_{12} nicht eulersch.

d) Beim vollständigen bipartiten Graph $K_{12,24}$ sind die Gerade 12 bzw. 24. Somit ist er eulersch nach der Bemerkung in c).

Aufgabe 3: a) $12 \cdot x \equiv 75 \bmod 125$ ist äquivalent zu $x \equiv b \cdot 75 \bmod 125$ für das Inverse b von $12 \bmod 125$. Wir berechnen b mit dem Euklidischen Algorithmus:
$1 = 5 \cdot 125 + (-52) \cdot 12$. Also $b \equiv (-52) \equiv 73 \bmod 125$. Deshalb $x \equiv 73 \cdot 75 \bmod 125$; also $x \equiv 100 \bmod 125$.

b) Es gibt keine Lösung, da $20 \cdot x$ immer von 5 geteilt wird, aber 81 nicht durch 5 teilbar ist. Bei einer Lösung müßte die Differenz $20 \cdot x - 81$ durch 5 teilbar sein.

c) Die Kongruenz $15 \cdot x \equiv 35 \bmod 125$ bedeutet $15 \cdot x = 35 + \lambda \cdot 125$. Diese Gleichung können wir durch 5 teilen und erhalten $3 \cdot x = 7 + \lambda \cdot 25$. Das bedeutet aber $3 \cdot x \equiv 7 \bmod 25$. Diese Kongruenz können wir lösen (wie bei a)):
$1 = 1 \cdot 25 + (-8) \cdot 3$, also $x \equiv (-8) \cdot 7 \equiv 19 \bmod 25$.
Modulo 125 erhalten wir 5 Lösungen: $x \equiv 19 + \lambda \cdot 25 \bmod 125$ mit $\lambda = 0,\ 1,\ 2,\ 3,\ 4$.
Also $x \equiv 19,\ 44,\ 69,\ 94,\ 119 \bmod 125$.

d) Der $\mathrm{ggT}(21, 35)$ ist 7 und teilt 14, deshalb gibt es Lösungen. Wir berechnen zunächst eine Lösung (a_0, b_0) mit dem Euklidischen Algorithmus: $21 \cdot 2\ +\ 35 \cdot (-1) = 7$. Somit ist $(a_0, b_0) = (4, -2)$ eine Lösung. Alle Lösungen erhält man (siehe Vorlesung) als
$\{(a, b) \mid a = 4 + \lambda \cdot 5\,,\ b = -2 - \lambda \cdot 3 \text{ mit } \lambda \in \mathbb{Z}\}$.

Aufgabe 4: a) Es genügt zu zeigen, dass $(\mathbb{Z}/12\,\mathbb{Z})^*$ multiplikativ abgeschlossen ist. Seien $\bar{a},\ \bar{c} \in (\mathbb{Z}/\,12\,\mathbb{Z})^*$, dann gibt es $\bar{b}\,, \bar{d}$ mit $\bar{a} \cdot \bar{b} = \bar{1}$ und $\bar{c} \cdot \bar{d} = \bar{1}$.
Hieraus sieht man $(\bar{a} \cdot \bar{c}) \cdot (\bar{b} \cdot \bar{d}) = \bar{1} \cdot \bar{1} = \bar{1}$, also liegt auch $\bar{a} \cdot \bar{c}$ in $(\mathbb{Z}/\,12\,\mathbb{Z})^*$.

b) Es gilt $(\mathbb{Z}/12\,\mathbb{Z})^* = \{\,\bar{1}\,, \bar{5}\,, \bar{7}\,, \bar{11}\,\}$. Wenn $(\mathbb{Z}/12\,\mathbb{Z})^*$ zyklisch wäre, müßte es ein Element der Ordnung 4 darin geben. Wir sehen aber, dass $\bar{1} \cdot \bar{1} = \bar{1}$, $\bar{5} \cdot \bar{5} = \bar{1}$, $\bar{7} \cdot \bar{7} = \bar{1}$ und $\bar{11} \cdot \bar{11} = \bar{1}$. Deshalb ist $(\mathbb{Z}/12\,\mathbb{Z})^*$ nicht zyklisch.

Aufgabe 5: Es gilt $M = \{1, 2, 3, 4, 6, 12\}$. M hat also 6 Elemente. Aus der Vorlesung wissen wir, daß jede endliche boolsche Algebra 2^n Elemente hat. Somit ist M keine boolsche Algebra.

<u>Alternativ:</u> Wir suchen eine O in M. Welches Element erfüllt: $x \oplus O = \text{kgV}(x, O) = x$ für alle x? Das ist $O = 1$. Somit müsste gelten $x \odot \neg x = 1$ für alle $x \in M$. Aber $2 \odot \neg 2 = \text{ggT}\ (2,\ 6) = 2 \neq 1$. Also ist M keine boolsche Algebra.