Universität Kassel
Fachbereich 10/16
Dr. Sebastian Petersen

15.09.2011

Klausur: Diskrete Strukturen I

Aufgabe 1. (8 Punkte)

a) Sei X eine Menge mit $|X| = 10$. Wie viele Elemente hat die Potenzmenge $P(X)$?

b) Wie viele verschiedene 3-elementige Teilmengen hat eine 7-elementige Menge?

c) Seien M und N Mengen. Wann wird eine Abbildung $f : M \to N$ *surjektiv* genannt?

d) Geben Sie eine injektive Abbildung $\{1, 2, 3, 4\} \to \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ explizit an, z.B. durch Angabe einer Wertetabelle. Wie viele injektive Abbildungen $\{1, 2, 3, 4\} \to \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ gibt es insgesamt?

e) Schreiben Sie die Permutation

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ 2 & 4 & 7 & 8 & 3 & 9 & 5 & 1 & 6 \end{pmatrix}$$

der Menge $\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$ als ein Produkt von disjunkten Zyklen.

Aufgabe 2. (5 Punkte) Eine Anlage produziert Transistoren. Die Wahrscheinlichkeit, daß einer dieser Transistoren bereits unmittelbar nach der Herstellung defekt ist, beträgt 0.005. Ein Prüfverfahren stuft einen defekten Transistor mit Wahrscheinlichkeit 0.99 (korrekterweise) als defekt ein. Ein funktionierender Transistor wird von dem Verfahren mit Wahrscheinlichkeit 0.05 (fälschlicherweise) als defekt eingestuft. Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, daß ein der Produktion entnommener und als defekt eingestufter Transistor tatsächlich defekt ist.*Es ist wichtig, daß der Rechenweg klar verständlich angegeben wird!*

Aufgabe 3. (6 Punkte) Ein Tetraeder, dessen Seiten mit den Ziffern 0, 1, 2 und 3 beschriftet sind, wird zwei Mal geworfen. Ergebnisraum ist $\Omega := \{0, 1, 2, 3\}^2$ mit der Gleichverteilung.

a) Entscheiden Sie, ob die Ereignisse $A := \{(0, 0), (0, 1), (0, 2), (0, 3)\}$ und $B := \{(1, 0), (2, 0), (0, 2)\}$ unabhängig sind. *Geben Sie eine präzise Begründung für Ihre Entscheidung!*

b) Sei

$$S : \Omega \to \mathbb{R}, (i, j) \mapsto ij$$

die Zufallsvariable, welche das Produkt der Ergebnisse der beiden Würfe angibt. Berechnen Sie den Erwartungswert $\mathbb{E}(S)$. *Geben Sie alle erforderlichen Rechenschritte an!*

Aufgabe 4. (5 Punkte)

a) Ein Versuch mit Ergebnisraum $\Omega = \{0, 1\}$ (0 bedeutet Niete, 1 Treffer) und Trefferwahrscheinlichkeit $p = 0.1$ wird 10 mal unabhängig wiederholt. Sei $T : \Omega^{10} \to \mathbb{R}$ die Zufallsvariable, welche die Anzahl der Treffer angibt. Berechnen Sie den Erwartungswert $\mathbb{E}(T)$ und die Varianz $\mathbb{V}(T)$.

b) Ein Versuch mit Ergebnisraum $\Omega = \{0, 1\}$ (0 =Niete, 1 =Treffer) und Trefferwahrscheinlichkeit $p = 0.1$ wird so lange unabhängig wiederholt, bis ein Treffer kommt. Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, daß der erste Treffer *spätestens* bei dem 4-ten Versuch (d.h. beim 4-ten Versuch oder früher) kommt. *Geben Sie alle erforderlichen Rechenschritte an!*

Aufgabe 5. (6 Punkte) Die Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sei rekursiv definiert durch $x_0 = 3$, $x_1 = 4$, $x_2 = 18$ und

$$x_n = 4x_{n-1} + x_{n-2} - 4x_{n-3} \quad \text{für } n \geq 3.$$

a) Geben Sie das charakteristische Polynom $p(X)$ dieser Rekursionsgleichung an und bestimmen Sie die Nullstellen von $p(X)$.

b) Finden Sie eine explizite, rekursionsfreie Darstellung der Folgenglieder x_n.

In beiden Teilaufgaben sind alle erforderlichen Rechenschritte anzugeben!

Lösungsskizze

Dies ist eine Lösungsskizze im eigentlichen Sinn, und sicher keine "Musterlösung". Wir haben nicht alle Details ausgearbeitet. Ferner ist eine "Musterlösung" im engeren Sinn gar nicht möglich, da es bei den Aufgaben grundsätzlich mehrere richtige Lösungswege geben kann.

Wir hoffen, daß Sie anhand dieser Lösungsskizze problemlos nachvollziehen können, wie man die Aufgaben richtig hätte bearbeiten können.

Aufgabe 1. (8 Punkte)

a) Nach Vorlesung gilt $|P(X)| = 2^{|X|} = 2^{10} = 1024$.

b) Nach Vorlesung sind es $\frac{7!}{3!\cdot 4!} = 35$ Stück.

c) Seien M und N Mengen und $f : M \to N$ eine Abbildung. f wird *surjektiv* genannt, wenn für jedes $y \in N$ ein $x \in M$ mit $f(x) = y$ existiert.

d) Die Abbildung

$$f : \{1, 2, 3, 4\} \to \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}, \; x \mapsto x$$

ist injektiv. Insgesamt gibt es genau $6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 = 360$ injektive Abbildungen $\{1, 2, 3, 4\} \to \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$. (Man hat 6 Möglichkeiten für die Wahl des Bildes von 1, dann noch 5 Möglichkeiten für die Wahl des Bildes von 2, u.s.w.)

e) Betrachte die Permutation

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ 2 & 4 & 7 & 8 & 3 & 9 & 5 & 1 & 6 \end{pmatrix}$$

der Menge $\{1,2,3,4,5,6,7,8,9\}$. Mit dem in der Vorlesung besprochenen Verfahren errechnet man (im Kopf):

$$\sigma = (1248) \circ (375) \circ (69).$$

Aufgabe 2. (5 Punkte) Eine Anlage produziert Transistoren. Die Wahrscheinlichkeit, daß einer dieser Transistoren bereits unmittelbar nach der Herstellung defekt ist, beträgt 0.005. Ein Prüfverfahren stuft einen defekten Transistor mit Wahrscheinlichkeit 0.99 (korrekter Weise) als defekt ein. Ein funktionierender Transistor wird von dem Verfahren mit Wahrscheinlichkeit 0.05 (fälschlicher Weise) als defekt eingestuft.

Ein Transistor wird der Produktion entnommen und geprüft. Sei D das Ereignis "Transistor ist defekt" und F das Ereignis "Transistor funktioniert". Sei ED das Ereignis "Transistor wird als defekt eingestuft" und EF das Ereignis "Transistor wird als funktionierend eingestuft". Nach Bayes gilt

$$P(D|ED) = \frac{P(D \cap ED)}{P(ED)} = \frac{P(D \cap ED)}{P(D \cap ED) + P(F \cap ED)}.$$

Es folgt

$$P(D|ED) = \frac{0.005 \cdot 0.99}{0.005 \cdot 0.99 + 0.995 \cdot 0.05} \approx 0.09.$$

(Bemerkungen: Das Ergebnis mag auf den ersten Blick recht klein erscheinen. Das Zeichnen eines Wahrscheinlichkeitsbaumes erleichtert die Aufgabe.)

Aufgabe 3. (6 Punkte) Ein Tetraeder, dessen Seiten mit den Ziffern 0, 1, 2 und 3 beschriftet sind, wird zwei Mal geworfen. Ergebnisraum ist $\Omega := \{0,1,2,3\}^2$ mit der Gleichverteilung.

a) Betrachte die Ereignisse $A := \{(0,0),(0,1),(0,2),(0,3)\}$ und $B := \{(1,0),(2,0),(0,2)\}$. Es gilt $P(A) = \frac{4}{16} = \frac{1}{4}$ und $P(B) = \frac{3}{16}$. Es folgt $P(A)P(B) = \frac{3}{4 \cdot 16}$. Ferner gilt $A \cap B = \{(0,2)\}$, also $P(A \cap B) = \frac{1}{16}$. Es gilt also $P(A)P(B) \neq P(A \cap B)$. Daher sind die Ereignisse A und B nicht unabhängig.

b) Sei

$$S : \Omega \to \mathbb{R}, (i,j) \mapsto ij$$

die Zufallsvariable, welche das Produkt der Ergebnisse der beiden Würfe angibt. Offenbar gilt $S(\Omega) = \{0,1,2,3,4,6,9\}$. Ferner gilt $|S^{-1}(0)| = 7$, $|S^{-1}(1)| = 1$, $|S^{-1}(2)| = 2$, $|S^{-1}(3)| = 2$, $|S^{-1}(4)| = 1$, $|S^{-1}(6)| = 2$ und $|S^{-1}(9)| = 1$. Per Def. gilt

$$\mathbb{E}(S) = \sum_{x \in S(\Omega)} P(S = x)x$$

und $P(S = x) = \frac{|S^{-1}(x)|}{16}$, weil P die Gleichverteilung ist. Es folgt

$$\mathbb{E}(S) = \frac{1}{16}(7 \cdot 0 + 1 \cdot 1 + 2 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + 1 \cdot 4 + 2 \cdot 6 + 1 \cdot 9) = \frac{36}{16} = \frac{9}{4}.$$

Aufgabe 4. (5 Punkte)

a) Ein Versuch mit Ergebnisraum $\Omega = \{0, 1\}$ (0 bedeutet Niete, 1 Treffer) und Trefferwahrscheinlichkeit $p = 0.1$ wird 10 mal unabhängig wiederholt. Sei $T : \Omega^{10} \to \mathbb{R}$ die Zufallsvariable, welche die Anzahl der Treffer angibt. Nach den in der Vorlesung bewiesenen Formeln gilt $\mathbb{E}(T) = 10p = 1$ und die Varianz $\mathbb{V}(T) = 10p(1 - p) = 0.9$.

b) Ein Versuch mit Ergebnisraum $\Omega = \{0, 1\}$ (0 =Niete, 1 =Treffer) und Trefferwahrscheinlichkeit $p = 0.1$ wird nun so lange unabhängig wiederholt, bis ein Treffer kommt. Sei X das in der Aufgabe beschriebene Ereignis. Dann ist $X = \{1, 01, 001, 0001\}$. Also gilt

$$P(X) = 0.1 + 0.9 \cdot 0.1 + 0.9^2 \cdot 0.1 + 0.9^3 \cdot 0.1 \approx 0.34.$$

Aufgabe 5. (6 Punkte) Die Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sei rekursiv definiert durch $x_0 = 3$, $x_1 = 4$, $x_2 = 18$ und

$$x_n = 4x_{n-1} + x_{n-2} - 4x_{n-3} \quad \text{für } n \geq 3.$$

a) Das charakteristische Polynom ist $p(X) = X^3 - 4X^2 - X + 4$. Man rät $p(1) = 0$. Durch Polynomdivision berechnet man $p(X) : (X - 1) = X^2 - 3X - 4$. Das hat nach der Lösungsformel für quadratische Gleichungen die Nullstellen 4 und -1. Es ergibt sich

$$p(X) = (X - 1)(X + 1)(X - 4);$$

Nullstellenmenge von $p(X)$ ist $\{1, -1, 4\}$. (Alle Nst. von $p(X)$ sind einfach.)

b) Nun liefert die in der Vorlesung bereitgestellte Theorie, daß es x, y, z gibt mit $x_n = x + y(-1)^n + z \cdot 4^n$ für alle n. Die Anfangsbedingungen führen auf das Gleichungssystem

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 4 \\ 1 & 1 & 16 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 18 \end{pmatrix}.$$

Dieses formt man um zu

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & 3 \\ 0 & 0 & 15 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 15 \end{pmatrix}$$

und sieht daran, daß es nur die Lösung $(x, y, z) = (1, 1, 1)$ hat. Es folgt, daß $x_n = 1 + (-1)^n + 4^n$ für alle n gilt.

In beiden Teilaufgaben sind alle erforderlichen Rechenschritte anzugeben!