UNIVERSITÄT KASSEL
FACHBEREICH 10/16

13.09.2012

Klausur: Diskrete Strukturen I

Name:	Vorname:	Matrikelnummer:	Versuch:

Unterschrift:

Bitte fangen Sie für jede Aufgabe ein neues Blatt an. Beschreiben Sie nur die Vorderseite der Blätter.

Es können maximal 31 Punkte erreicht werden.

Aufgabe 1	Aufgabe 2	Aufgabe 3	Aufgabe 4	Aufgabe 5	Aufgabe 6

Punkte:	**Note:**

Aufgabe 1. (6 Punkte)

a) Sei X eine Menge mit $|X| = 10$. Wie viele Elemente enthält die Menge

$$P_3(X) := \{U : U \subset X \text{ und } |U| = 3\}$$

der drei-elementigen Teilmengen von X?

b) Sei $A = \{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} : x^2 + y^2 = 1\}$ und $B = \mathbb{Z} \times \mathbb{R}$. Geben Sie die Menge $A \cap B$ (durch Auflisten ihrer Elemente) explizit an. Begründen Sie Ihre Antwort.

c) Schreiben Sie die Permutation

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 \\ 4 & 3 & 5 & 8 & 10 & 9 & 6 & 1 & 2 & 7 \end{pmatrix}$$

der Menge $\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$ als ein Produkt von disjunkten Zyklen.

Aufgabe 2. (4 Punkte)

a) Zehn durchnummerierte Stühle stehen in einem Kreis. Acht Männer und zwei Frauen sollen Platz nehmen. Wie viele Möglichkeiten gibt es, die Stühle so zu besetzen, dass die beiden Frauen nicht nebeneinander sitzen?

b) Wie viele Möglichkeiten gibt es, zehn gleichartige Murmeln auf drei unterscheidbare Boxen derart zu verteilen, dass jede Box mindestens zwei Murmeln enthält?

In beiden Teilaufgaben 2a) und 2b) ist die Antwort in nachvollziehbarer Weise zu begründen.

Aufgabe 3. (6 Punkte)

a) Sei (Ω, P) ein endlicher Wahrscheinlichkeitsraum und $X : \Omega \to \mathbb{R}$ eine Zufallsvariable. Geben Sie die Definition des Erwartungswertes $\mathbb{E}(X)$ und der Varianz $\mathbb{V}(X)$ wieder.

b) Seien $X : \Omega \to \mathbb{R}$ und $Y : \Omega \to \mathbb{R}$ zwei Zufallsvariable. Entscheiden Sie jeweils ohne Begründung, ob die folgenden Aussagen (i) bzw. (ii) wahr oder falsch sind.

(i) Es gilt $\mathbb{E}(X + Y) = \mathbb{E}(X) + \mathbb{E}(Y)$.

(ii) Es gilt $\mathbb{E}(X \cdot Y) = \mathbb{E}(X) \cdot \mathbb{E}(Y)$.

c) Eine mit den Ziffern 0 und 1 beschriftete faire Münze wird drei Mal geworfen. Ergebnisraum ist $\Omega := \{0, 1\}^3$ mit der Gleichverteilung. Sei

$$Z : \Omega \to \mathbb{R}, \ (\omega_1, \omega_2, \omega_3) \mapsto \omega_1\omega_2\omega_3$$

die Zufallsvariable, die das Produkt der einzelnen Ergebnisse angibt. Berechnen Sie $\mathbb{E}(Z)$ und $\mathbb{V}(Z)$. (Der Rechenweg muß in nachvollziehbarer Weise mit angegeben werden.)

Aufgabe 4. (6 Punkte) Ein fairer Würfel wird 5 Mal geworfen. Ergebnisraum ist $\Omega = \{1, 2, \cdots 6\}^5$ mit der Gleichverteilung P. Sei A das Ereignis, dass mindestens zwei Einsen erscheinen und die zweite Eins spätestens beim vierten Wurf erscheint. Sei

$$B = \{(x_1, \cdots, x_5) : x_1 = x_2 = x_3 \text{ und } x_4 = x_5\}$$

das Ereignis, dass die ersten drei und die letzten beiden Würfe die gleiche Augenzahl zeigen.

a) Berechnen Sie $P(A)$ und $P(B)$. (Der Rechenweg muß in nachvollziehbarer Weise angegeben werden.)

b) Entscheiden Sie, ob die Ereignisse A und B unabhängig sind. Geben Sie eine stichhaltige Begründung für die Aussage, die Sie treffen.

Aufgabe 5. (3 Punkte) Eine Urne enthält zehn mit den Ziffern 1 bis 10 durchnummerierte Kugeln. Die Kugeln sind gefärbt. Aus dieser Urne wird nun eine Kugel gezogen. Sei U (bzw. $\overline{U}$) das Ereignis, dass die gezogene Kugel eine ungerade (bzw. eine gerade) Nummer hat. Dann gilt $P(U) = \frac{1}{2}$. Sei B das Ereignis, dass die gezogene Kugel blau ist. Man weiß, dass 2 der ungerade nummerierten Kugeln und 3 der gerade nummerierten Kugeln blau sind: $P(B|U) = \frac{2}{5}$ und $P(B|\overline{U}) = \frac{3}{5}$. Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit $P(U|B)$ dafür, dass die gezogene Kugel eine ungerade Nummer trägt, falls bekannt ist, dass sie blau ist.
Der Rechenweg soll in nachvollziehbarer Weise angegeben werden.

Aufgabe 6. (6 Punkte) Die Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sei rekursiv definiert durch $x_0 = 2$, $x_1 = 9$, $x_2 = 76$ und

$$x_n = 9x_{n-1} - 15x_{n-2} - 25x_{n-3} \quad \text{für } n \geq 3.$$

a) Geben Sie das charakteristische Polynom $p(X)$ dieser Rekursionsgleichung an und bestimmen Sie die Nullstellen von $p(X)$.

b) Finden Sie eine explizite, rekursionsfreie Darstellung der Folgenglieder x_n.
In beiden Teilaufgaben sind alle erforderlichen Rechenschritte anzugeben!

Lösungsskizze

Aufgabe 1.

a) Es gilt $|P_3(X)| = \binom{10}{3} = \frac{10!}{3!7!} = \frac{10\cdot9\cdot8}{6} = 120$.

b) *Behauptung:* $A \cap B = \{(1,0),(-1,0),(0,1),(0,-1)\}$. *Beweis.* Offenbar gilt $A \cap B \supset \{(1,0),(-1,0),(0,1),(0,-1)\}$. Wir zeigen, dass auch $A \cap B \subset \{(1,0),(-1,0),(0,1),(0,-1)\}$ gilt. Sei $(x,y) \in A \cap B$. Dann gilt $x^2 + y^2 = 1$. Es folgt $|x| \leq 1$, und da $x \in \mathbb{Z}$ erzwingt das $x \in \{-1,0,1\}$. Wenn $x \in \{1,-1\}$, so folgt $y = 0$. Falls $x = 0$, so folgt $y \in \{1,-1\}$. Es bleiben also für (x,y) nur die vier Möglichkeiten.

c) $\sigma = (1\ 4\ 8)(2\ 3\ 5\ 10\ 7\ 6\ 9)$.

Aufgabe 2.

a) Es gibt $\binom{10}{2}$ Möglichkeiten acht Männer und zwei Frauen auf irgendeine Weise in dem Kreis zu plazieren. In 10 von diesen Möglichkeiten sitzen die beiden Frauen nebeneinander. Es gibt also

$$\binom{10}{2} - 10 = \frac{10\cdot 9}{2} - 10 = 45 - 10 = 35$$

Möglichkeiten, die 8 Männer und 2 Frauen derart in dem Kreis zu plazieren, dass die beiden Frauen nicht nebeneinander sitzen.

b) Denke mir die Boxen mit den Ziffern 1, 2 und 3 beschriftet. Zunächst lege ich in jede Box zwei Murmeln. Dann verteile ich die restlichen 4 Murmeln irgendwie auf die drei Boxen. Ergebnisraum ist

$$\Omega = \{(x_1,x_2,x_3) \in \mathbb{N}^3 : x_1 + x_2 + x_3 = 4\},$$

wobei das Ergebnis (x_1,x_2,x_3) bedeutet, dass in Box i genau x_i *zusätzliche* Kugeln gelegt werden ($i \in \{1,2,3\}$). Man kann Ω identifizieren mit der Menge

$$\Omega' = \{w \in \{0,1\}^6 \ : \ |\{i : w_i = 1\}| = 2\}$$

der binären Worte der Länge 6, die genau zwei Einsen und 4 Nullen enthalten. (Z.B entspricht $(1,1,2) \in \Omega$ dem binären Wort 010100.) Nun gilt

$$|\Omega| = |\Omega'| = \binom{6}{2} = \frac{6\cdot 5}{2} = 15.$$

Anmerkung: In der Vorlesung gab es eine Formel, mit der man $|\Omega|$ direkt berechnen kann.

Aufgabe 3.

a) Siehe Skript, Abschnitt III.6.

b) Aussage (i) ist wahr; dies war ein Satz der Vorlesung. Aussage (ii) ist falsch; in der Vorlesung wurden Gegenbeispiele erläutert. Vgl. Abschnitt III.6.

c) Man beachte, dass $Z(\Omega) = \{0,1\}$. Es gilt $P(Z=1) = P(111) = \frac{1}{8}$ und $P(Z=0) = 1 - P(Z=1) = \frac{7}{8}$. Somit gilt

$$\mathbb{E}(Z) = 0 \cdot P(Z=0) + 1 \cdot P(Z=1) = \frac{1}{8}.$$

Ferner gilt $\mathbb{E}(Z^2) = \mathbb{E}(Z) = \frac{1}{8}$ und $E(Z)^2 = \frac{1}{8^2}$. Mit einer Formel der Vorlesung folgt

$$\mathbb{V}(Z) = E(Z^2) - E(Z)^2 = \frac{1}{8} - \frac{1}{8^2} = \frac{7}{64}.$$

Aufgabe 4.

a) Sei

$$X_i(\omega) = \begin{cases} 1 & \text{falls } \omega_i = 1 \\ 0 & \text{falls } \omega_i \in \{2,3,4,5,6\} \end{cases}$$

und $T = X_1 + X_2 + X_3 + X_4$ die Anzahl der Einsen unter den ersten 4 Würfen. Die X_i sind unabhängige, $\{0,1\}$-wertige Zufallsvariable. Somit ist T binomialverteilt. Also gilt

$$\begin{aligned} P(A) &= P(T \geq 2) = 1 - P(T=0) - P(T=1) = \\ &= 1 - \left(\tfrac{5}{6}\right)^4 - 4\left(\tfrac{1}{6}\right)\left(\tfrac{5}{6}\right)^3 = \\ &= \tfrac{19}{144}. \end{aligned}$$

Ferner gilt $B = \{(a,a,a,b,b) : 1 \leq a, b \leq 6\}$ und daher

$$P(B) = \frac{|B|}{|\Omega|} = \frac{6^2}{6^5} = \frac{1}{216}.$$

b) Es gilt $A \cap B = \{(1,1,1,a,a) : 1 \leq a \leq 6\}$ und daher

$$P(A \cap B) = \frac{|A|}{|\Omega|} = \frac{6}{6^5} = \frac{1}{1296}.$$

Andererseits gilt $P(A)P(B) = \frac{19}{144}\frac{1}{216} = \frac{19}{31104}$. Man sieht, dass $P(A \cap B) \neq P(A)P(B)$. Deshalb sind A und B nicht unabhängig.

Aufgabe 5. Nach der Formel von Bayes gilt

$$P(U|B) = \frac{P(B|U)P(U)}{P(B|U)P(U) + P(B|\overline{U})P(\overline{U})} = \frac{\frac{2}{5} \cdot \frac{1}{2}}{\frac{2}{5} \cdot \frac{1}{2} + \frac{3}{5} \cdot \frac{1}{2}} = \frac{2}{5}.$$

Aufgabe 6.

a) Das charakteristische Polynom dieser Rekursionsgleichung ist

$$p(X) = X^3 - 9X^2 + 15X + 25.$$

Man errät die Nullstelle $x_0 = -1$. Durch Polynomdivision findet man $p(X) : (X+1) = X^2 - 10X + 25$. Mit der Lösungsformel für quadratische Gleichungen sieht man, dass $x_1 = 5$ doppelte Nullstelle von $X^2 - 10X + 25$ ist. Somit hat $p(X)$ die folgenden Nullstellen: -1 (1-fach) und 5 (2-fach).

b) Nach einem Satz der Vorlesung bilden nun die Folgen

$$((-1)^n)_{n\in\mathbb{N}},\ (5^n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ und } (n5^n)_{n\in\mathbb{N}}$$

ein Fundamentalsystem der Rekursionsgleichung; es gibt also $a, b, c \in \mathbb{R}$ mit

$$x_n = a(-1)^n + b5^n + cn5^n$$

für alle n und die Anfangswertbedingungen führen auf folgendes Gleichungssystem für die Zahlen a, b und c:

$$\begin{aligned} 2 &= x_0 = a + b \\ 9 &= x_1 = -a + 5b + 5c \\ 76 &= x_2 = a + 25b + 50c \end{aligned}$$

Dieses Gleichungssystem kann man z.B. mit dem Gauß-Algorithmus lösen; man erhält $(a, b, c) = (1, 1, 1)$. Daher gilt

$$x_n = (-1)^n + 5^n + n5^n$$

für alle $n \in \mathbb{N}$.