Universität Kassel
Fachbereich 10/16
PD Dr. Sebastian Petersen

14.09.2017

Klausur zur Vorlesung

Diskrete Strukturen I

Es können maximal **40** Punkte erreicht werden.

Version mit Lösungsskizze

Zur Notation: Es ist $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, \cdots\}$ gesetzt.

Aufgabe 1 (2+2+2+2=8 Punkte)

a) Seien A und B Aussagen. Entscheiden Sie, ob die Aussage

$$(\neg(A \to B)) \to (\neg B)$$

eine Tautologie ist (d.h. ob diese Aussage wahr ist, unabhängig vom Wahrheitsgehalt von A und B), indem Sie die folgende Wahrheitstafel vollständig ausfüllen:

A	B	$A \to B$	$\neg(A \to B)$	$\neg B$	$(\neg(A \to B)) \to (\neg B)$
w	w				
w	f				
f	w				
f	f				

b) Wir betrachten die Abbildung $f : \mathbb{N} \to \mathbb{Z},\ f(x) = x^2$.

(i) Ist f injektiv?

(ii) Ist f surjektiv?

Begründen Sie Ihre Antworten kurz und stichhaltig!

c) Gegeben sei die folgende Permutation σ der Menge $X = \{1, 2, 3, \ldots, 9\}$:

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ 8 & 5 & 3 & 2 & 6 & 4 & 9 & 1 & 7 \end{pmatrix}.$$

Schreiben Sie σ als Produkt von disjunkten Zyklen.

d) Beweisen Sie durch vollständige Induktion, dass für jedes $n \in \mathbb{N}$ die Zahl $5^n + 7$ durch 4 teilbar ist.

Lösungsskizze zu Aufgabe 1.

a)

A	B	$A \to B$	$\neg(A \to B)$	$\neg B$	$(\neg(A \to B)) \to (\neg B)$
w	w	w	f	f	w
w	f	f	w	w	w
f	w	w	f	f	w
f	f	w	f	w	w

(Man sieht, dass die Aussage $(\neg(A \to B)) \to (\neg B)$ eine Tautologie ist.)

b) (i) f ist injektiv. Denn für $x, y \in \mathbb{N}$ folgt aus $f(x) = f(y)$ schon $x^2 = y^2$ und wegen $x, y \geq 0$ impliziert das $x = y$.

(ii) f ist nicht surjektiv. Zum Beispiel gibt es kein $x \in \mathbb{N}$ mit $-1 = f(x) = x^2$, da Quadrate natürlicher Zahlen nicht-negativ sind.

c) $\sigma = (1\,8) \circ (2\,5\,6\,4) \circ (7\,9)$.

d) *Behauptung:* 4 teilt $x_n := 5^n + 7$ für alle $n \in \mathbb{N}$.

Beweis. Vollständige Induktion nach n.

Induktionsanfang $n = 0$: $x_0 = 8$ ist offenbar durch 4 teilbar.

Induktionsschritt $n \to n+1$: Wir dürfen annehmen, dass x_n durch 4 teilbar ist, d.h. dass es ein $u \in \mathbb{N}$ mit $x_n = 4u$ gibt (Induktionsannahme). Wir müssen zeigen, dass x_{n+1} durch 4 teilbar ist.

Nun ist aber $x_{n+1} = 5^{n+1} + 7 = 4 \cdot 5^n + 5^n + 7 = 4 \cdot 5^n + 4u = 4(5^n + u)$ durch 4 teilbar, wie gewünscht.

Aufgabe 2 (2+2+2+2=8 Punkte)

a) 10 völlig gleichartige Murmeln werden auf 3 unterscheidbare Boxen (Box A, B und C) verteilt. Wie viele Möglichkeiten gibt es, dies zu tun? (Hinweis: Sie müssen

$$|\{(x_1, x_2, x_3) : x_1, x_2, x_3 \in \mathbb{N} \text{ und } x_1 + x_2 + x_3 = 10\}|$$

berechnen).

b) 4 unterscheidbare mit den Ziffern $1, 2, 3, 4$ fortlaufend durchnummerierte Murmeln werden auf 6 Boxen (Box A bis F) derart verteilt, dass jede Box höchstens eine Murmel enthält und genau zwei Boxen frei bleiben. Wie viele Möglichkeiten gibt es, dies zu tun? (*Hinweis:* Zählen Sie, wie viele injektive Abbildungen $\{1, 2, 3, 4\} \to \{A, B, C, D, E, F\}$ es gibt!)

c) Eine Urne enthält 5 rote und 3 weiße Kugeln. Es werden gleichzeitig 6 Kugeln entnommen. Was ist die Wahrscheinlichkeit dafür, dass die Stichprobe alle drei weißen Kugeln enthält.

d) Vier (unterscheidbare!) Würfel werden gleichzeitig geworfen. Ergebnisraum ist also $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}^4$ mit der Gleichverteilung P. Sei E das Ereignis, dass zwei der Würfel die Augenzahl Fünf und zwei der Würfel die Augenzahl Sechs zeigen. Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit $P(E)$.

Lösungsskizze zu Aufgabe 2.

a) Sei $\Omega = \{(x_1, x_2, x_3) : x_1, x_2, x_3 \in \mathbb{N} \text{ und } x_1 + x_2 + x_3 = 10\}$. Sei B die Menge der binären Worte der Länge 12, die genau 2 Einsen enthalten.

$$w : \Omega \to B, x \mapsto \underbrace{0 \cdots 0}_{x_1 \text{ Stck}} 1 \underbrace{0 \cdots 0}_{x_2 \text{ Stck}} 1 \underbrace{0 \cdots 0}_{x_3 \text{ Stck}}$$

ist bijektiv und daher ist $|\Omega| = |B| = \binom{12}{2} = \frac{12!}{10!2!} = \frac{12 \cdot 11}{2} = 66$.

Anmerkung: Es gab in der Vorlesung eine fertige Formel, die auf $|\Omega| = \binom{12}{2}$ führt, und diese hätte man natürlich auch direkt benutzen dürfen!

b) Es sind $6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 = 360$ Möglichkeiten.

c) Dies ist eine typische Aufgabe zur hypergeometrischen Verteilung. Die gesuchte Wahrscheinlichkeit ist

$$p = \frac{\binom{3}{3}\binom{5}{3}}{\binom{8}{6}} = \frac{10}{28} = \frac{5}{14}.$$

d) $|E| = \binom{4}{2}$ und daher ist $P(E) = \frac{1}{6^4}\binom{4}{2} = \frac{6}{6^4} = 6^{-3}$.

Aufgabe 3 (3+4+1=8 Punkte)
Erst wird eine faire Münze geworfen. Wenn Sie Kopf zeigt, dann wird mit einem fairen Würfel gewürfelt und die Augenzahl notiert. Wenn Sie Zahl zeigt, dann wird mit zwei (unterscheidbaren!) fairen Würfeln gleichzeitig gewürfelt und die Summe der Augenzahlen notiert. Wir betrachten die folgenden Ereignisse:

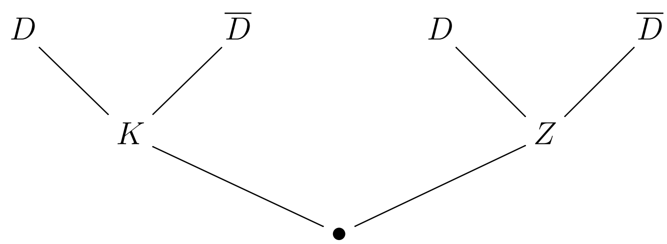
Sei K das Ereignis, dass die Münze im ersten Schritt Kopf zeigt.
Sei Z das Ereignis, dass die Münze im ersten Schritt Zahl zeigt.
Sei D das Ereignis, dass die im zweiten Schritt notierte Zahl 3 ist.

a) Bestimmen Sie die bedingten Wahrscheinlichkeiten $P(D|K)$ und $P(D|Z)$.

b) Berechnen Sie $P(D \cap K)$, $P(D \cap Z)$, $P(D)$ und $P(K|D)$.

c) Sind die Ereignisse (D, K) unabhängig?

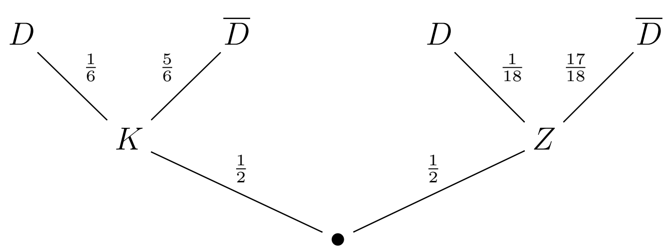
Hinweis: Es kann nützlich sein, den folgenden Ereignisbaum mit schon erhaltenen Teilergebnissen zu beschriften:



Lösungsskizze zu Aufgabe 3.

a) $P(D|K) = \frac{1}{6}$. Ferner ist $P(D|Z)$ die Wsk., beim Würfeln mit zwei Würfeln Augensumme 3 zu erzielen, also $P(D|Z) = \frac{2}{36} = \frac{1}{18}$.

Übersicht:



b)

$$
\begin{aligned}
P(D \cap K) &= P(D|K)P(K) = \frac{1}{12} \\
P(D \cap Z) &= P(D|Z)P(Z) = \frac{1}{36} \\
P(D) &= P(D \cap K) + P(D \cap Z) = \frac{1}{12} + \frac{1}{36} = \frac{1}{9} \\
P(K|D) &= \frac{P(D \cap K)}{P(D)} = \frac{1/12}{1/9} = \frac{9}{12} = \frac{3}{4}
\end{aligned}
$$

c) Nein! Sonst müsste ja $P(D|K) = P(D)$ sein, was nach a) und b) nicht der Fall ist.

Aufgabe 4 (2+2+2+2=8 Punkte) Eine Urne enthält drei Kugeln, die mit den Ziffern $0, 1$ und 2 durchnummeriert sind. Aus dieser Urne wird 10-mal eine Kugel mit Zurücklegen gezogen. Wir betrachten also $\Omega = \{0,1,2\}^{10}$ mit der Gleichverteilung P. Sei $Z_i : \Omega \to \mathbb{N}$ das Ergebnis des i-ten Zuges.

a) Sei $T = |\{i \in \{1, \cdots, 10\} : Z_i = 2\}|$ die "Anzahl der Treffer" im Gesamtexperiment, wenn das Erscheinen der Kugel mit Nummer 2 als Treffer gewertet wird. Berechnen Sie den Erwartungswert $\mathbb{E}(T)$ und die Varianz $\mathbb{V}(T)$. (*Hinweis:* Sie können die Formeln für Erwartungswert und Varianz einer Binomialverteilung zur Trefferwsk. $p = \frac{1}{3}$ benutzen.)

b) Welche Abschätzung nach oben liefert die Ungleichung von Chebychev für

$$P(|T - \mathbb{E}(T)| \geq 3)?$$

c) Wir betrachten nun die Zufallsvariable $X = (Z_1 - Z_2)^2$ auf Ω, die das Quadrat der Differenz der Ergebnisse im ersten und zweiten Zug angibt. Bestimmen Sie den Wertebereich von X und berechnen Sie dann den Erwartungswert $\mathbb{E}(X)$.

d) Entscheiden Sie mit kurzer Begründung, ob die Familie (X, T) von Zufallsvariablen unabhängig ist. (*Hinweis:* Berechnen Sie $P(T = 10)$, $P(X = 0)$ und $P(T = 10 \wedge X = 0)$.)

Lösungsskizze zu Aufgabe 4.

a) T ist bernoulli-verteilte Z.V. zur Trefferwahrscheinlichkeit $p = \frac{1}{3}$ und mit $n = 10$. Also ist

$$\mathbb{E}T = np = \frac{10}{3}$$
$$\mathbb{V}T = np(1-p) = 10 \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{2}{3} = \frac{20}{9}$$

b) Chebyshev liefert

$$P(|T - \mathbb{E}T| \geq \underbrace{3}_{=:\varepsilon}) \leq \frac{\mathbb{V}T}{\varepsilon^2} = \frac{20/9}{9} = \frac{20}{81}.$$

c) Offenbar ist $W_X = \{0, 1, 4\}$ der Wertebereich von X. Es folgt

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}X &= \sum_{x \in W_X} xP(X = x) = \\
&= 0 \cdot P(X = 0) + 1 \cdot P(X = 1) + 4P(X = 4) = \\
&= P(X = 1) + 4P(X = 4) = \\
&= P(\{(0,1), (1,0), (2,1), (1,2)\}) + 4P(\{(0,2), (2,0)\}) \text{ (etwas missbräuchliche Notation!)} \\
&= \frac{4}{9} + 4 \cdot \frac{2}{9} = \frac{12}{9} = \frac{4}{3}.
\end{aligned}$$

d) Man berechnet, dem Hinweis folgend:

$$P(T = 10) = \frac{1}{3^{10}}$$
$$P(X = 0) = P(Z_1 = Z_2) = P(\{(0,0),(1,1),(2,2)\}) = \frac{3}{9} = \frac{1}{3}$$
$$P(T = 10 \wedge X = 0) = P(T = 10) = \frac{1}{3^{10}}.$$

Also ist $P(T = 10 \wedge X = 0) \neq P(T = 10)P(X = 0)$, d.h. (T, X) ist nicht unabhängig.

Aufgabe 5 (4+4=8 Punkte)

a) Gegeben sei die rekursiv definierte Folge $(x_n)_{n\geq 0}$ mit

(R) $\qquad x_n = 3x_{n-1} + 4x_{n-2}$

(A) $\qquad x_0 = 3,\ x_1 = 2$

Berechnen Sie eine rekursionsfreie Darstellung der Folge $(x_n)_{n\geq 0}$.

b) Gegeben sei die rekursiv definierte Folge $(y_n)_{n\geq 0}$ mit

(R) $\qquad y_n = -2y_{n-1} - y_{n-2}$

(A) $\qquad y_0 = 1,\ y_1 = -2$

Berechnen Sie eine rekursionsfreie Darstellung der Folge $(y_n)_{n\geq 0}$.

Lösungsskizze zu Aufgabe 5.

a) Das charakteristische Polynom von dem Rekursionsschema (R) ist $P(T) = T^2 - 3T - 4 = (T+1)(T-4)$ (pq-Formel); die Nullstellen von $P(T)$ sind -1 und 4 (jeweils 1-fach). Also gibt es (c_1, c_2) mit

$$x_n = c_1(-1)^n + c_2 4^n \ \forall n,$$

und es gilt (c_1, c_2) aus der Anfangsbedingung (A) zu bestimmen.

$$\begin{aligned}\begin{pmatrix} c_1(-1)^0 + c_2 4^0 & = x_0 = 3 \\ c_1(-1)^1 + c_2 4^1 & = x_1 = 2 \end{pmatrix} &\Leftrightarrow \begin{pmatrix} c_1 + c_2 & = 3 \\ -c_1 + 4c_2 & = 2 \end{pmatrix} \\ &\Leftrightarrow \begin{pmatrix} c_1 + c_2 & = 3 \\ 5c_2 & = 5 \end{pmatrix} \\ &\Leftrightarrow (c_1, c_2) = (2, 1)\end{aligned}$$

Somit ist $\boxed{x_n = 2(-1)^n + 4^n}$.

b) Das charakteristische Polynom von dem Rekursionsschema (R) ist $P(T) = T^2 + 2T + 1 = (T+1)^2$; dies hat -1 als *doppelte* Nullstelle. Also gibt es (c_1, c_2) mit

$$y_n = c_1(-1)^n + c_2 n(-1)^n \ \forall n,$$

und es gilt (c_1, c_2) aus der Anfangsbedingung (A) zu bestimmen.

$$\begin{aligned}\begin{pmatrix} c_1(-1)^0 + c_2 \cdot 0 \cdot (-1)^0 & = y_0 = 1 \\ c_1(-1)^1 + c_2(-1)^1 & = y_1 = -2 \end{pmatrix} &\Leftrightarrow \begin{pmatrix} c_1 & = 1 \\ -c_1 - c_2 & = -2 \end{pmatrix} \\ &\Leftrightarrow (c_1, c_2) = (1, 1)\end{aligned}$$

Somit ist $\boxed{y_n = (-1)^n + n(-1)^n = (-1)^n(1+n)}$.