Universität Kassel
Fachbereich 10/16
Dr. Sebastian Petersen

15.03.2012

Klausur: Diskrete Strukturen I

Aufgabe 1. (8 Punkte)

a) Sei $X = \{0, 1\}$. Geben Sie die Potenzmenge $P(X)$ (durch Auflisten ihrer Elemente) an.

b) Seien M und N Mengen. Wann wird eine Abbildung $f : M \to N$ *injektiv* genannt? (Bitte geben Sie die präzise mathematische Definition dieses Begriffes wieder.)

c) Wie viele surjektive Abbildungen $\{1, 2, 3, 4\} \to \{1, 2\}$ gibt es?

d) Schreiben Sie die Permutation

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 \\ 7 & 4 & 8 & 9 & 3 & 2 & 5 & 1 & 10 & 6 \end{pmatrix}$$

der Menge $\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$ als ein Produkt von disjunkten Zyklen.

Aufgabe 2. (5 Punkte) Gegeben sind zwei Urnen. Die eine ist mit k und die andere mit z beschriftet. Urne k enhält 3 rote und 9 weiße Kugeln. Urne z enthält 10 rote und 2 weiße Kugeln. Es wird das folgende zweistufige Experiment durchgeführt: Zuerst wird eine faire Münze geworfen. Wenn sie Kopf zeigt, wird aus Urne k eine Kugel gezogen. Wenn sie Zahl zeigt, wird aus Urne z eine Kugel gezogen. K (bzw. Z) sei das Ereignis, daß die Münze Kopf (bzw. Zahl) zeigt. R (bzw. W) sei das Ereignis, daß im zweiten Schritt des Experiments eine rote (bzw. weiße) Kugel gezogen wird. Es gilt also $P(K) = P(Z) = \frac{1}{2}$, $P(R|K) = \frac{3}{12}$ und $P(R|Z) = \frac{10}{12}$.

a) Berechnen Sie $P(W|K)$ und $P(W|Z)$ und skizzieren Sie einen entsprechenden Wahrscheinlichkeitsbaum.

b) Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit $P(R)$ dafür, daß im zweiten Schritt eine rote Kugel gezogen wird.

c) Das Experiment wurde durchgeführt und eine weiße Kugel wurde gezogen. Was ist die bedingte Wahrscheinlichkeit $P(K|W)$ dafür, daß unter der Bedingung W bei dem Münzwurf Kopf gekommen ist?

Aufgabe 3. (5 Punkte) Ein Versuch mit möglichem Ausgang 0 (Niete) oder 1 (Treffer) und Trefferwahrscheinlichkeit $p = \frac{1}{2}$ wird 400 mal wiederholt. Ergebnisraum ist $\Omega = \{0,1\}^{400}$ mit der Gleichverteilung P. Wir betrachten für $i = 1, \cdots, 400$ die Zufallsvariable $X_i : \Omega \to \{0,1\}$, die das Ergebnis des i-ten Versuches angibt. Sei

$$S : \Omega \to \mathbb{R},\ \omega \mapsto \sum_{i=1}^{400} X_i(\omega)$$

die Summe der Zufallsvariablen X_i; dann gibt S die Trefferzahl bei dem Gesamtversuch an.

a) Berechnen Sie den Erwartungswert $\mu := \mathbb{E}(S)$ und die Varianz $\sigma^2 := \mathbb{V}(S)$.

b) Welche Abschätzung nach oben liefert die Ungleichung von Chebyshev für die Wahrscheinlichkeit $P(|S - \mu| \geq 50)$?
In beiden Teilaufgaben sind alle erforderlichen Rechenschritte anzugeben!

Aufgabe 4. (6 Punkte) Eine mit den Ziffern 0 und 1 beschriftete Münze und ein Würfel werden gleichzeitig geworfen. Ergebnisraum ist $\Omega = \{0,1\} \times \{1,2,\cdots,6\} = \{(i,j) : 0 \leq i \leq 1, 1 \leq j \leq 6\}$ mit der Gleichverteilung P.

a) Entscheiden Sie, ob die Ereignisse $A := \{(0,1),(0,2),(0,3),(0,4)\}$ und $B := \{(0,1),(1,1),(1,6)\}$ unabhängig sind und geben Sie eine *stichhaltige Begründung* für Ihre Entscheidung.

b) Nach dem Versuch wird das Produkt der Zahlen, die Münze und Würfel zeigen, notiert. Sei
$$X : \Omega \to \{0,1,\cdots,6\}, (i,j) \mapsto ij$$
die entsprechende Zufallsvariable auf (Ω, P). Berechnen Sie den Erwartungswert $\mathbb{E}(X)$ und die Varianz $\mathbb{V}(X)$. *(Geben Sie bitte den Rechenweg vollständig an.)*

Aufgabe 5. (6 Punkte) Die Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sei rekursiv definiert durch $x_0 = 3$, $x_1 = 7$, $x_2 = 19$ und

$$x_n = 6x_{n-1} - 11x_{n-2} + 6x_{n-3} \quad \text{für } n \geq 3.$$

a) Geben Sie das charakteristische Polynom $p(X)$ dieser Rekursionsgleichung an und bestimmen Sie die Nullstellen von $p(X)$.

b) Finden Sie eine explizite, rekursionsfreie Darstellung der Folgenglieder x_n.
In beiden Teilaufgaben sind alle erforderlichen Rechenschritte anzugeben!

Lösungsskizze

Aufgabe 1.

a) Sei $X = \{0,1\}$. Dann gilt $P(X) = \{\emptyset, \{0\}, \{1\}, \{0,1\}\}$.

b) Seien M und N Mengen. Eine Abbildung $f : M \to N$ wird *injektiv* genannt, wenn für alle $m_1, m_2 \in M$ mit $m_1 \neq m_2$ schon $f(m_1) \neq f(m_2)$ gilt.

c) Sei $X := \{1, 2, 3, 4\}$ und $Y := \{1, 2\}$. Insgesamt gibt es $2^4 = 16$ Abbildungen $X \to Y$. Davon sind nur die beiden konstanten Abbildungen nicht surjektiv. Daher gibt es 14 surjektive Abbildungen $X \to Y$.

d) Betrachte die Permutation

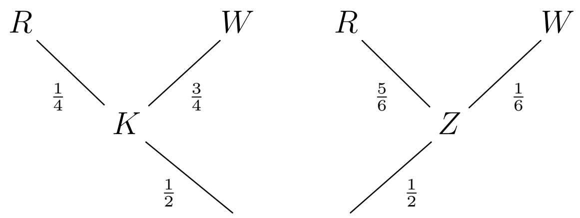
$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 \\ 7 & 4 & 8 & 9 & 3 & 2 & 5 & 1 & 10 & 6 \end{pmatrix}$$

der Menge $\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$. Das in der Vorlesung geschilderte Verfahren liefert (Rechnung im Kopf):

$$\sigma = (1\ 7\ 5\ 3\ 8) \circ (2\ 4\ 9\ 10\ 6).$$

Aufgabe 2. Gegeben sind zwei Urnen. Die eine ist mit k und die andere mit z beschriftet. Urne k enhält 3 rote und 9 weiße Kugeln. Urne z enthält 10 rote und 2 weiße Kugeln. Es wird das folgende zweistufige Experiment durchgeführt: Zuerst wird eine faire Münze geworfen. Wenn sie Kopf zeigt, wird aus Urne k eine Kugel gezogen. Wenn sie Zahl zeigt, wird aus Urne z eine Kugel gezogen. K (bzw. Z) sei das Ereignis, daß die Münze Kopf (bzw. Zahl) zeigt. R (bzw. W) sei das Ereignis, daß im zweiten Schritt des Experiments eine rote (bzw. weiße) Kugel gezogen wird. Es gilt also $P(K) = P(Z) = \frac{1}{2}$, $P(R|K) = \frac{3}{12}$ und $P(R|Z) = \frac{10}{12}$.

a) Es gilt $P(W|K) = 1 - P(R|K) = 1 - \frac{3}{12} = \frac{9}{12} = \frac{3}{4}$ und $P(W|Z) = 1 - P(R|Z) = 1 - \frac{10}{12} = \frac{2}{12} = \frac{1}{6}$. Hier ist der entsprechende Wahrscheinlichkeitsbaum:



b) Es gilt $P(R) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{4} + \frac{1}{2} \cdot \frac{5}{6} = \frac{1}{8} + \frac{5}{12} = \frac{13}{24}$.

c) Das Experiment wurde durchgeführt und eine weiße Kugel wurde gezogen. Es gilt $P(W) = 1 - P(R) = \frac{11}{24}$ und $P(K \cap W) = \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} = \frac{3}{8}$. Daher

$$P(K|W) = \frac{P(K \cap W)}{P(W)} = \frac{3/8}{11/24} = \frac{9}{11}.$$

Aufgabe 3. Ein Versuch mit möglichem Ausgang 0 (Niete) oder 1 (Treffer) und Trefferwahrscheinlichkeit $p = \frac{1}{2}$ wird 400 mal wiederholt. Ergebnisraum ist $\Omega = \{0, 1\}^{400}$ mit der Gleichverteilung P. Wir betrachten für $i = 1, \cdots, 400$ die Zufallsvariable $X_i : \Omega \to \{0, 1\}$, die das Ergebnis des i-ten Versuches angibt. Sei

$$S : \Omega \to \mathbb{R},\ \omega \mapsto \sum_{i=1}^{400} X_i(\omega)$$

die Summe der Zufallsvariablen X_i.

a) Die Zufallsvariable S ist binomialverteilt mit Parametern $n = 400$ und $p = \frac{1}{2}$. Nach Sätzen der Vorlesung über die Binomialverteilung gilt $\mu := \mathbb{E}(S) = np = 200$ und $\sigma^2 := \mathbb{V}(S) = np(1-p) = 100$.

b) Nach der Ungleichung von Chebychev gilt $P(|S-\mu| \geq k) \leq \frac{\sigma^2}{k^2}$ (für alle k). Im Fall $k = 50$ folgt unter Beachtung der Ergebnisse in Teil a)

$$P(|S-\mu| \geq 50) \leq \frac{100}{50^2} = \frac{1}{25}.$$

Aufgabe 4. Eine mit den Ziffern 0 und 1 beschriftete Münze und ein Würfel werden gleichzeitig geworfen. Ergebnisraum ist $\Omega = \{0,1\} \times \{1,2,\cdots,6\} = \{(i,j) : 0 \leq i \leq 1, 1 \leq j \leq 6\}$ mit der Gleichverteilung P.

a) Sind die Ereignisse $A := \{(0,1),(0,2),(0,3),(0,4)\}$ und $B := \{(0,1),(1,1),(1,6)\}$ unabhängig?

Für jedes Ereignis $X \subset \Omega$ gilt $P(X) = \frac{|X|}{|\Omega|}$, wobei $|\Omega| = 2 \cdot 6 = 12$. Es gilt $P(A \cap B) = P(\{(0,1)\}) = \frac{1}{12}$. Ferner gilt $P(A) = \frac{4}{12} = \frac{1}{3}$ und $P(B) = \frac{3}{12} = \frac{1}{4}$, also $P(A)P(B) = \frac{1}{12}$. Daher gilt $P(A \cap B) = P(A)P(B)$. Somit sind die Ereignisse A und B unabhängig.

b) Nach dem Versuch wird das Produkt der Zahlen, die Münze und Würfel zeigen, notiert. Sei

$$X : \Omega \to \{0,1,\cdots,6\}, (i,j) \mapsto ij$$

die entsprechende Zufallsvariable auf (Ω, P).

Durch Auszählen kommt man auf folgende Verteilung für X.

x	0	1	2	3	4	5	6
$P(X=x)$	$\frac{6}{12}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{12}$

(Beachte, daß für $x \geq 1$ genau dann $X(i,j) = x$ gelten kann, wenn $i = 1$ und $j = x$. $X(i,j) = 0$ gilt genau dann, wenn i Null ist.) Nun gilt

$$\mathbb{E}(X) = \sum_x P(X=x)x = \frac{6}{12} \cdot 0 + \frac{1}{12}(1+2+3+4+5+6) = \frac{0+21}{12} = \frac{7}{4}.$$

Ferner gilt

$$\mathbb{V}(X) = \mathbb{E}((X - \mathbb{E}(X))^2) = \sum_x P(X=x)\left(x - \frac{7}{4}\right)^2.$$

Es folgt

$$\mathbb{V}(X) = \frac{6}{12} \cdot \left(-\frac{7}{4}\right)^2 + \frac{1}{12}\left(\left(-\frac{3}{4}\right)^2 + \left(\frac{1}{4}\right)^2 + \left(\frac{5}{4}\right)^2 + \left(\frac{9}{4}\right)^2 + \left(\frac{13}{4}\right)^2 + \left(\frac{17}{4}\right)^2\right) =$$

$$= \frac{6}{12}\frac{49}{16} + \frac{1}{12}\frac{9+1+25+81+169+289}{16} = 217/48 \approx 4.52.$$

Aufgabe 5. (6 Punkte) Die Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sei rekursiv definiert durch $x_0 = 3$, $x_1 = 7$, $x_2 = 19$ und

$$x_n = 6x_{n-1} - 11x_{n-2} + 6x_{n-3} \quad \text{für } n \geq 3.$$

a) Das charakteristische Polynom $p(X)$ dieser Rekursionsgleichung ist

$$p(X) = X^3 - 6X^2 + 11X - 6.$$

Man errät die Nullstelle $\xi_1 = 1$. Polynomdivision liefert $p(X) : (X-1) = X^2 - 5X + 6$. Mit der Lösungsformel für quadratische Gleichungen findet man die weiteren Nullstellen $\xi_2 = 2$ und $\xi_3 = 3$. Alle Nullstellen von $p(X)$ sind 1-fach. Es gilt $p(X) = (X-1)(X-2)(X-3)$.

b) Nach Vorlesung muß es $a, b, c \in \mathbb{R}$ geben mit

$$x_n = a \cdot 1^n + b \cdot 2^n + c \cdot 3^n.$$

Insbesondere gilt $x_0 = a + b + c$, $x_1 = a + 2b + 3c$ und $x_2 = a + 4b + 9c$. Einsetzen der Information über die Startwerte liefert

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 4 & 9 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 7 \\ 19 \end{pmatrix}$$

Lösen dieses Gleichungssystems (z.B. mit dem Gauß-Algorithmus) liefert $(a, b, c) = (1, 0, 2)$. Daher gilt

$$x_n = 1 + 2 \cdot 3^n$$

für alle n.