Universität Kassel
Fachbereich 10/16

13.03.2013

Klausur: Diskrete Strukturen I

Name:	Vorname:	Matrikelnummer:	Versuch:

Unterschrift:

Bitte fangen Sie für jede Aufgabe ein neues Blatt an. Beschreiben Sie nur die Vorderseite der Blätter.

Es können maximal **30** Punkte erreicht werden.

Aufgabe 1	Aufgabe 2	Aufgabe 3	Aufgabe 4	Aufgabe 5

Punkte:	**Note:**

Wichtiger Hinweis: Bei allen Aufgaben soll der Rechenweg in nachvollziehbarer Weise mit angegeben werden.

Aufgabe 1. (8 Punkte)

a) Seien A und B Aussagen. Beweise oder widerlege: Die Aussage

$$(A \to B) \leftrightarrow (B \to A)$$

ist wahr (unabhängig vom Wahrheitsgehalt von A und B). (Hinweis: Sie können den Beweis durch eine geeignete Wahrheitstafel erbringen.)

b) Wie viele Elemente enthält $P(P(\{1,2,3\}))$? (Zur Erinnerung: $P(X)$ steht für die Potenzmenge von X.)

c) Wie viele bijektive Abbildungen $\{1,2,3,4\} \to \{1,2,3,4\}$ gibt es?

d) Schreiben Sie die Permutation

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 \\ 2 & 3 & 1 & 6 & 5 & 4 & 10 & 9 & 7 & 8 \end{pmatrix}$$

der Menge $\{1,2,3,4,5,6,7,8,9,10\}$ als ein Produkt von disjunkten Zyklen.

Aufgabe 2. (4 Punkte)

a) Für ein binäres Wort $x \in \{0,1\}^6$ der Länge 6 sei

$$w(x) = |\{i \in \{1,2,\cdots,6\} : x_i = 1\}|$$

die Anzahl der Einsen in dem Wort x. Man bestimme die Anzahl

$$|\{x \in \{0,1\}^6 : w(x) = 4 \text{ und } x_5 = x_6\}|$$

der binären Worte der Länge 6, die genau vier Einsen enthalten und in denen die letzten beiden Ziffern gleich sind.

b) Zehn mit den Ziffern 1 bis 10 durchnummerierte Stühle stehen in einem Kreis. Ein Mann und eine Frau betreten das Zimmer und setzen sich. Berechnen Sie die Anzahl der möglichen Sitzordnungen bei denen die beiden Personen nicht nebeneinander sitzen.

Aufgabe 3. (5 Punkte)

a) Urne A enthält 3 schwarze, 2 weiße und 1 rote Kugel. Urne B enthält 1 schwarze, 2 weiße und 4 rote Kugeln. Erst wird aus Urne A und dann aus Urne B eine Kugel gezogen. Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass bei beiden Zügen die selbe Farbe gezogen wird. (Hinweis: Sei X_A (bzw. X_B) das Ergebnis des Zuges aus Urne A (bzw. aus Urne B). Dann sind X_A und X_B unabhängige Zufallsvariable.)

b) Ein Kartenspiel enthält 32 Karten und 4 Asse. Es wird nun gemischt und dann werden 10 Karten gleichzeitig entnommen. Was ist die Wahrscheinlichkeit dafür, dass alle vier Asse unter den entnommenen Karten sind? Ihr Endergebnis darf Binomialkoeffizienten enthalten, die nicht explizit ausgerechnet werden müssen.

Aufgabe 4. (8 Punkte) Ein Würfel wird 7 mal nacheinander geworfen; Ergebnisraum ist $\Omega = \{1, 2, \cdots, 6\}^7$ mit der Gleichverteilung P. Die Zufallsvariable $W_i : \Omega \to \{1, 2, \cdots, 6\}$ gebe für $1 \leq i \leq 7$ das Ergebnis des i-ten Wurfes an.

a) Sei

$$E = \{(x_1, x_2, \cdots, x_7) \in \{1, 2, \cdots, 6\}^7 : \{x_1, x_2, \cdots, x_7\} = \{1, 2, \cdots, 6\}\}$$

das Ereignis, dass jede der Zahlen $1, 2, 3, 4, 5, 6$ bei mindestens einem der Würfe vorkommt. Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit $P(E)$.

b) Sei $X = |\{i \in \{1, 2, \cdots, 7\} : W_i = 6\}|$ die Anzahl der Würfe, die Augenzahl 6 ergeben. Berechnen Sie den Erwartungswert $\mathbb{E}(X)$ und die Varianz $\mathbb{V}(X)$. (Hinweis: Fassen Sie das Erscheinen von 6 als Treffer auf; Trefferwahrscheinlichkeit ist dann $\frac{1}{6}$. Sie können nun die Formel für den Erwartungswert bzw. die Varianz einer Binomialverteilung verwenden.)

c) Sei X die Zufallsvariable aus Aufgabe b). Sei $Y = W_1 + W_2$ die Summe der Augenzahlen aus den ersten beiden Würfen. Berechnen Sie $P(X = 1)$ und $P(Y = 2)$ und $P(X = 1 \wedge Y = 2)$. Entscheiden Sie ferner, ob die Zufallsvariablen X und Y unabhängig sind, und geben Sie eine stichhaltige Begründung für die Aussage, die Sie treffen.

Aufgabe 5. (5 Punkte) Die Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sei rekursiv definiert durch $x_0 = 1$, $x_1 = -7$, $x_2 = -47$ und

$$x_n = 7x_{n-1} + x_{n-2} - 7x_{n-3} \quad \text{für } n \geq 3.$$

a) Geben Sie das charakteristische Polynom $p(X)$ dieser Rekursionsgleichung an und bestimmen Sie die Nullstellen von $p(X)$.

b) Finden Sie eine explizite, rekursionsfreie Darstellung der Folgenglieder x_n.

Lösungsskizze

Aufgabe 1.

a) Wir *widerlegen* die Aussage: Nimm an, A ist falsch und B ist wahr. Dann ist $A \to B$ wahr und $B \to A$ falsch. Daher ist $(A \to B) \leftrightarrow (B \to A)$ dann falsch.

b) Für jede endliche Menge M gilt $|P(M)| = 2^{|M|}$ nach Vorlesung. Man erhält mit dieser Formel

$$|P(P(\{1,2,3\}))| = 2^{(2^3)} = 2^8 = 256.$$

c) Es sind $4! = 24$ Stück nach einer Formel der Vorlesung.

d) Es gilt $\sigma = (1\ 2\ 3) \circ (4\ 6) \circ (7\ 10\ 8\ 9)$.

Aufgabe 2.

a) Sei $X = \{x \in \{0,1\}^6 : w(x) = 4 \text{ und } x_5 = x_6\}$. Sei ferner $X_0 = \{x \in X : x_6 = 0\}$ und $X_1 = \{x \in X : x_6 = 1\}$. Dann gilt $X_0 = \{(111100)\}$ und

$$X_1 = \{(x_1, x_2, x_3, x_4, 1, 1) \in \{0,1\}^6 : |\{i \in \{1,2,3,4\} : x_i = 1\}| = 2\}.$$

Es folgt $|X_0| = 1$ und $|X_1| = \binom{4}{2} = 6$. Offenbar gilt $X = X_0 \cup X_1$ und $X_0 \cap X_1 = \emptyset$. Daher

$$|X| = |X_0| + |X_1| = 1 + 6 = 7.$$

a) Sagen wir, zuerst kommt die Frau und dann der Mann in das Zimmer. Die Frau hat dann 10 Möglichkeiten einen Stuhl zu wählen. Für den Mann verbleiben noch 7 Möglichkeiten, weil ein Stuhl schon von der Frau belegt ist und die beiden Plätze neben der Frau nicht besetzt werden sollen. Insgesamt sind es $7 \cdot 10 = 70$ Möglichkeiten.

Aufgabe 3.

a) Im folgenden steht s für schwarz, w für weiß und r für rot. Die Zufallsvariablen X_A und X_B sind unabhängig und sie haben Werte in $\{s, w, r\}$. Daher gilt

$$\begin{aligned}
P(X_A = X_B) &= P(X_A = X_B = s) + P(X_A = X_B = w) + P(X_A = X_B = r) = \\
&= P(X_A = s)P(X_B = s) + P(X_A = w)P(X_B = w) + \\
&\quad + P(X_A = r)P(X_B = r) = \\
&= \tfrac{3}{6} \cdot \tfrac{1}{7} + \tfrac{2}{6} \cdot \tfrac{2}{7} + \tfrac{1}{6} \cdot \tfrac{4}{7} = \tfrac{11}{42}.
\end{aligned}$$

b) Die gesuchte Wahrscheinlichkeit ist

$$p = \frac{\binom{4}{4}\binom{28}{6}}{\binom{32}{10}} = \frac{\binom{28}{6}}{\binom{32}{10}}$$

Aufgabe 4.

a) Sei $\mu_k(x) = |\{i \in \{1,2,\cdots,7\} : x_i = k\}|$ und $E_k = \{x \in E : \mu_k(x) = 2\}$ das Ereignis, dass jede der Zahlen $1,2,3,4,5,6$ bei mindestens einem der Würfe vorkommt und zwar Zahl k genau zwei mal (und die anderen Zahlen demnach genau einmal). Es gilt $E = \bigcup_{k=1}^{6} E_k$ und dies ist eine disjunkte Vereinigung. Ferner gilt $|E_k| = \binom{7}{2}5!$. Also folgt $|E| = 6\binom{7}{2}5!$. Da P die Gleichverteilung ist erhalten wir

$$P(E) = \frac{6\binom{7}{2}5!}{6^7} = \frac{\frac{7\cdot 6}{2}5!}{6^6} = \frac{35}{648}.$$

b) Fasse das Erscheinen von 6 als Treffer auf. Trefferwahrscheinlichkeit ist dann $p = \frac{1}{6}$. Der Versuch wird $n = 7$ mal wiederholt. Die Zufallsvariable X (Trefferzahl) ist binomialverteilt mit Parametern n und p. Nach den Formeln für Erwartungswert und Varianz der Binomialverteilung gilt $\mathbb{E}(X) = np = \frac{7}{6}$ und $\mathbb{V}(X) = np(1-p) = 7 \cdot \frac{1}{6} \cdot \frac{5}{6} = \frac{35}{36}$.

c) Es gilt $P(X = 1) = 7 \cdot \frac{1}{6} \cdot \left(\frac{5}{6}\right)^6 = \frac{109375}{279936}$. Ferner gilt

$$P(Y = 2) = P(W_1 = 1 \wedge W_2 = 1) = \left(\frac{1}{6}\right)^2 = \frac{1}{36}.$$

Das Ereignis $X = 1 \wedge Y = 2$ ist das Ereignis, daß bei den ersten beiden Würfen zwei Einsen kommen und bei den 5 weiteren Würfen genau eine 6 erscheint. Es gilt

$$P(X = 1 \wedge Y = 2) = \frac{1}{6^2} \cdot 5 \cdot \frac{1}{6} \cdot \left(\frac{5}{6}\right)^4 = 5 \cdot \left(\frac{1}{6}\right)^3 \left(\frac{5}{6}\right)^4 = \frac{5^5}{6^7}.$$

Ferner gilt

$$P(X = 1)P(Y = 2) = \frac{7 \cdot 5^6}{6^7} \cdot \frac{1}{36}.$$

Man sieht leicht, dass $P(X = 1)P(X = 2) \neq P(X = 1 \wedge Y = 2)$ gilt. Daher sind die Zufallsvariable X und Y nicht unabhängig.

Aufgabe 5.

a) Das charakteristische Polynom dieser Rekursionsgleichung ist $p(X) = X^3 - 7X^2 - X + 7$. Man errät leicht die Nullstelle 1. Durch Polynomdivision errechnet man $p(X) : (X - 1) = X^2 - 6X - 7$. Nun benutzt man die Lösungsformel für quadratische $X^2 - 6X - 7$ die Nullstellen -1 und 7 hat. Also hat $p(X)$ die folgenden Nullstellen: $+1$, -1 und 7, jeweils 1-fach.

b) Nach Vorlesung ist durch

$$(1^n)_{n\in\mathbb{N}}, \quad ((-1)^n)_{n\in\mathbb{N}} \quad \text{und} \quad (7^n)_{n\in\mathbb{N}}$$

ein Fundamentalsystem der Rekursionsgleichung gegeben; es gibt also $a, b, c \in \mathbb{R}$ mit $x_n = a + b \cdot (-1)^n + c \cdot 7^n$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Die Anfangswertbedingung führt auf folgendes Gleichungssystem über die Koeffizienten a, b, c:

$$\begin{aligned} 1 &= x_0 = a + b + c \\ -7 &= x_1 = a - b + 7c \\ -47 &= x_2 = a + b - 49c. \end{aligned}$$

Man löst dieses Gleichungssystem z.B. mit dem Gauß-Algorithmus und erhält $(a, b, c) = (1, 1, -1)$. Also gilt

$$x_n = 1 + (-1)^n - 7^n$$

für alle $n \in \mathbb{N}$.