Klausur Diskrete Strukturen II

(Informatiker)

8. März 2010

(Hans-Georg Rück)

Aufgabe 1 (4 Punkte):

Auf der Menge $M = \{a, b, c\}$ seien zwei Verknüpfungen $\triangle$, $\square$ gegeben durch ihre jeweiligen Verknüpfungstafeln

$$\begin{array}{c|ccc} \triangle & a & b & c \\ \hline a & c & a & b \\ b & a & b & c \\ c & b & c & a \end{array} \qquad \begin{array}{c|ccc} \square & a & b & c \\ \hline a & a & c & b \\ b & c & b & a \\ c & a & b & c \end{array}$$

a) Ist $(M, \triangle)$ eine Gruppe?

b) Ist $(M, \square)$ eine Gruppe?

Begründen Sie Ihre Antwort. Das Assoziativgesetz können Sie dabei vernachlässigen.

Aufgabe 2 (6 Punkte):

a) Berechnen Sie $(\mathbb{Z}/7\,\mathbb{Z})^*$, d.h. die Einheitengruppe im Ring $\mathbb{Z}/7\,\mathbb{Z}$. Zeigen Sie, dass diese Gruppe $(\mathbb{Z}/7\,\mathbb{Z})^*$ zyklisch ist und berechnen Sie einen Erzeuger.

b) Ist die Gruppe $(\mathbb{Z}/15\,\mathbb{Z})^*$ ebenfalls zyklisch? Begründung!

Aufgabe 3 (7 Punkte):

a) Berechnen Sie das multiplikativ Inverse von $\bar{3}$ in $\mathbb{Z}/20\,\mathbb{Z}$.

b) Berechnen Sie alle $x \in \mathbb{Z}$, die die beiden Kongruenzen

$$\begin{aligned} 3\,x &\equiv 1 \bmod 20 \\ x &\equiv 3 \bmod 7 \end{aligned}$$

erfüllen.

c) Berechnen Sie alle (!) $x, y \in \mathbb{Z}$ mit

$$6\,x + 9\,y = 15\,.$$

Aufgabe 4 (9 Punkte):

Betrachten Sie den Graphen $G = (V, E)$ mit der Knotenmenge $V = \{2, 3, 4, 5, 6, 8, 9, 10\}$ und der Kantenmenge $E = \{\{a, b\} \mid a, b \in V\ ,\ a \neq b\ ,\ \mathrm{ggT}(a, b) > 1\}$.

a) Zeichnen Sie G.

b) Ist G eulersch?

c) Gibt es in G einen Hamilton-Kreis?

d) Suchen sie einen maximalen vollständigen Teilgraphen von G, d.h. suchen Sie einen Teilgraphen K_n bei dem n maximal ist.

e) Berechnen Sie die chromatische Zahl $\chi(G)$.

f) Ist G plättbar?

Bitte begründen Sie alle Ihre Antworten sorgfältig!

Aufgabe 5 (3 Punkte):

Zeigen Sie, dass es in einem Graphen mit mindestens zwei Knoten stets zwei Knoten mit demselben Grad gibt.

Aufgabe 6 (4 Punkte):

Es sei $S = \{a, b, c, d\}$ eine Menge mit 4 Elementen. Bestimmen Sie zweistellige Operatoren $\oplus, \odot$ sowie einen einstelligen Operator $\neg$, so dass $(S, \oplus, \odot, \neg)$ eine Boolesche Algebra wird. Begründung!

Lösungen:

Aufgabe 1: a) $(M, \triangle)$ ist eine Gruppe, denn: Eine Gruppe mit 3 Elementen ist $\mathbb{Z}/3\,\mathbb{Z} = \{\bar{0},\ \bar{1},\ \bar{2},\}$ mit $+$ als Verknüpfung. Man erhält die Verknüpfungstafel (beachte: andere Reihenfolge!)

$+$	$\bar{1}$	$\bar{0}$	$\bar{2}$
$\bar{1}$	$\bar{2}$	$\bar{1}$	$\bar{0}$
$\bar{0}$	$\bar{1}$	$\bar{0}$	$\bar{2}$
$\bar{2}$	$\bar{0}$	$\bar{2}$	$\bar{1}$

Setzt man $a = \bar{1},\ b = \bar{0},\ c = \bar{2}$, so erhält man die Tafel für $(M, \triangle)$.
b) $(M, \square)$ ist keine Gruppe, denn: Es gilt $a \,\square\, a = a$ und $c \,\square\, a = a$. In einer Gruppe kann man kürzen, deshalb würde $a = c$ folgen.

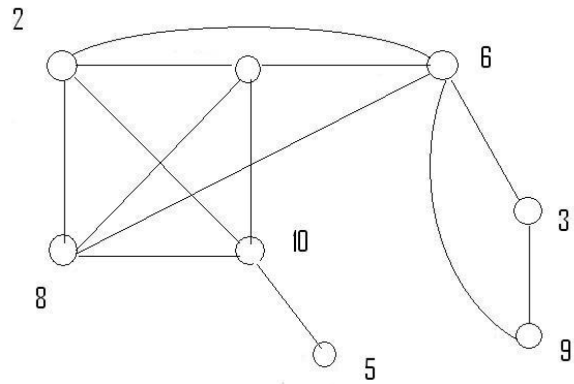
Aufgabe 2: a) $(\mathbb{Z}/7\,\mathbb{Z})^* = \{\bar{1}, \bar{2}, \bar{3}, \bar{4}, \bar{5}, \bar{6}\}$,
wir rechnen: $\bar{2} \cdot \bar{2} = 4$, $\bar{2} \cdot \bar{2} \cdot \bar{2} = \bar{1}$, also ist $\bar{2}$ kein Erzeuger.
Weiter: $\bar{3} \cdot \bar{3} = \bar{2}$, $\bar{3}^3 = \bar{6}$, $\bar{3}^4 = \bar{4}$, $\bar{3}^5 = \bar{5}$, $\bar{3}^6 = \bar{1}$.
Wir sehen, dass die Ordnung von $\bar{3}$ gleich 6 ist. $\bar{3}$ ist also ein Erzeuger, und $(\mathbb{Z}/7\,\mathbb{Z})^*$ ist zyklisch.
b) $(\ \mathbb{Z}/15\mathbb{Z})^* = \{\bar{1}, \bar{2}, \bar{4}, \bar{7}, \bar{8}, \bar{11}, \bar{13}, \bar{14}\}$.
Wir berechnen die Ordnung eines jeden Elements:
$\bar{1}^1 = \bar{1},\ \bar{2}^4 = \bar{1},\ \bar{4}^2 = \bar{1},\ \bar{7}^4 = \bar{1},\ \bar{8}^4 = \bar{1},\ \bar{11}^2 = \bar{1},\ \bar{13}^4 = \bar{1},\ \bar{14}^2 = \bar{1}$.
Es gibt also kein Element der Ordnung 8. Deshalb ist $(\mathbb{Z}/15\mathbb{Z})^*$ nicht zyklisch.
Alternativ sieht man $(\mathbb{Z}/15\mathbb{Z})^* \simeq (\mathbb{Z}/5\mathbb{Z})^* \times (\mathbb{Z}/3\mathbb{Z})^*$.
Die Gruppe enthält also eine Untergruppe der Form $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ und ist deshalb nicht zyklisch.

Aufgabe 3: a) Mit dem Euklidischen Algorithmus berechnen wir den ggT von 3 und 20 und stellen diesen dar: $1 = 7 \cdot 3 + (-1) \cdot 20$. Deshalb folgt $\bar{7} \cdot \bar{3} = \bar{1}$ in $\mathbb{Z}/20\,\mathbb{Z}$. Also ist $\bar{7}$ das Inverse von $\bar{3}$.
b) Wir schreiben die Kongruenz $3\,x \equiv 1 \bmod 20$ nach Teil a) als $x \equiv 7 \bmod 20$. Löse nun:

$$\begin{aligned} x &\equiv 7 \bmod 20 \\ x &\equiv 3 \bmod 7\,, \end{aligned}$$

Berechne den ggT von 20 und 7 und stelle ihn dar: $1 = (-1) \cdot 20 + 3 \cdot 7$. Dann löst $x_0 = (-1) \cdot 20 \cdot 3 + 3 \cdot 7 \cdot 7 = 87$ die Kongruenz. Jede Lösung ist von der Form $x = 87 + \lambda \cdot 140$ mit $\lambda \in \mathbb{Z}$.
c) Bestimme eine Lösung durch Raten: $6 \cdot 1 + 9 \cdot 1 = 15$, also $(x_0, y_0) = (1, 1)$, oder mit dem Euklidischen Algorithmus: ggT $(6, 9) = 3 = (-1) \cdot 6 + 1 \cdot 9$ also $15 = (-5) \cdot 6 + 5 \cdot 9$ also $(\tilde{x}_0, \tilde{y}_0) = (-5, 5)$.
Sei (x, y) eine weitere Lösung, so gilt $6\,x + 9\,y = 6\,x_0 + 9\,y_0$ also $2\,(x - x_0) = 3\,(y_0 - y)$, dann muss $x - x_0 = 3\,k$ und $y_0 - y = 2\,k$. Zahlen dieser Form sind auch Lösungen, deshalb ist die Lösungsmenge gleich $\big\{(1 + 3\,k, 1 - 2\,k) \mid k \in \mathbb{Z}\big\}$.

Aufgabe 4: a)



b) G ist nicht Eulersch, denn der Knoten 5 hat den Grad 1.
c) G enthält keinen Hamilton-Kreis, denn ein solcher Kreis müsste auch durch den Knoten 5 gehen und würde dann den Knoten 10 zweimal durchlaufen.
d) G enthält K_5 mit den Knoten $2, 4, 6, 8, 10$. G enthält aber keinen K_6; die einzigen Knoten mit einem Grad ≥ 5 sind 10 und 6.
e) $\chi(G) = 5$, denn: Da G den Graphen K_5 enthält, ist $\chi(G) \geq 5$. Andererseits kommt man auch mit 5 Farben aus: $2 \to 1$, $4 \to 2$, $6 \to 3$, $8 \to 4$, $10 \to 5$, $5 \to 1$, $3 \to 1$, $9 \to 2$.
f) G ist nicht plättbar, denn: G enthält K_5 und K_5 ist nicht plättbar nach Vorlesung.

Aufgabe 5: Es sei G ein Graph mit n Knoten, $n \geq 2$. Die Menge der Grade $\{deg\,(v)\}$ ist enthalten in der Menge $\{0, 1, \ldots, n-1\}$. Wenn es ein v mit $deg\,(v) = n-1$ gibt, dann ist 0 kein Grad. Also gilt: $|\{deg\,(v)\}| \leq n-1$. Somit ist die Abbildung deg : Knoten $\to \{deg\,(v)\}$ nicht injektiv. Es gibt also zwei Knoten mit demselben Grad.

Aufgabe 6: Wir wissen, dass jede endliche Boolsche Algebra aus 2^n Elementen besteht und dann isomorph zur Potenzmengenalgebra auf der Menge $\{1, 2, \ldots, n\}$ ist. Hier ist $n = 2$ und somit ist $S \simeq \{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{1, 2\}\}$.
Wir nennen $a = \emptyset, b = \{1\}, c = \{2\}, d = \{1,\ 2\}, \oplus = \cup, \odot = \cap, \neg = \setminus$ und erhalten z.B. die Verknüpfungstafel

$\oplus$	a	b	c	d
a	a	b	c	d
b	b	b	d	d
c	c	d	c	d
d	d	d	d	d

,

Für $\odot$ geht es analog. Außerdem gilt $\neg\, a = d, \neg\, b = c, \neg\, c = b, \neg\, d = a$.