Universität Kassel
Fachbereich 10/16 08.09.2011
Dr. Sebastian Petersen

Klausur: Diskrete Strukturen II

Aufgabe 1. (5 Punkte)

a) Ergänzen Sie die folgende Definition: "Eine Relation R auf einer Menge X heißt *symmetrisch*, wenn ..."

b) Wann wird eine Relation R auf einer Menge X *partielle Ordnung* genannt?

c) Sei R eine Relation auf der Menge $M := \{1, 2, 3, 4, 5\}$, so dass die jeweiligen Relationenmengen $[a] := \{b \in M | bRa\}$ wie folgt gegeben sind:

$$[1] = \{1, 3, 4\}, [2] = \{2\}, [3] = \{1, 3, 4\},$$

$$[4] = \{1, 3, 4\}, [5] = \{1, 2, 3, 4\}.$$

Entscheiden Sie *mit präziser Begründung*, ob R eine Äquivalenzrelation auf M ist.

Aufgabe 2. (4 Punkte)

a) Geben Sie drei verschiedene Einheiten und drei verschiedene Nicht-Einheiten des Ringes $\mathbb{Z}/100\mathbb{Z}$ an. *Begründen Sie Ihre Antwort!*

b) Wie viele Elemente enthält die Einheitengruppe $((\mathbb{Z}/100\mathbb{Z})^*, \cdot)$ insgesamt? (Hinweis: $\varphi(100) = \varphi(25)\varphi(4)$.) *Begründen Sie Ihre Antwort!*

Aufgabe 3. (5 Punkte)

a) Berechnen Sie ein $x \in \mathbb{Z}$, das

$$x \equiv 5 \bmod 9 \text{ und } x \equiv 10 \bmod 11$$

erfüllt.

b) Berechnen Sie die Menge *aller* $(x, y) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ mit

$$5x + 7y = 2.$$

In beiden Teilaufgaben ist die Antwort zu begründen!

Aufgabe 4. (6 Punkte) Sei $\Gamma := (V, E)$ ein Graph und $W := (v_0, \cdots, v_\ell)$ eine endliche Folge in der Knotenmenge K.

a) Wann wird W ein *Pfad* in Γ genannt?

b) Unter welcher Bedingung heißt W ein *Hamilton-Kreis* in Γ?

c) Wann wird W eine *Euler-Tour* in Γ genannt?

d) Wie ist die *chromatische Zahl* $\chi(\Gamma)$ definiert?

Aufgabe 5. (6 Punkte) Entscheiden Sie *mit ausführlicher Begründung*, ob folgende Aussagen wahr oder falsch sind.

a) Für jede natürliche Zahl $n \geq 2$ ist der vollständige Graph K_n mit n Knoten genau dann eulersch, wenn n ungerade ist.

b) Der vollständige bipartite Graph $K_{3,3}$ ist hamiltonsch.

c) Der vollständige bipartite Graph $K_{5,2}$ ist hamiltonsch.

Aufgabe 6. (4 Punkte) Geben Sie eine 8-elementige Menge B, zwei Verknüpfungen $\oplus, \odot : B \times B \to B$ und eine Abbildung $\neg : B \to B$ derart an, daß $(B, \oplus, \odot, \neg)$ eine Boolesche Algebra ist. Erläutern Sie, warum Ihre Definitionen eine Boolesche Algebra liefern.

Lösungsskizze zur Klausur: Diskrete Strukturen II

Dies ist eine Lösungsskizze im eigentlichen Sinn, und sicher keine “Musterlösung”. Wir haben nicht alle Details ausgearbeitet. Ferner ist eine “Musterlösung” im engeren Sinn gar nicht möglich, da es bei den Aufgaben grundsätzlich mehrere richtige Lösungswege geben kann. Bei Aufgaben, die ein reines Abfragen von Definitionen darstellen, haben wir auf eine Antwort verzichtet und verweisen auf das entsprechende Skriptum bzw. auf die entsprechende Literatur.

Wir hoffen, daß Sie anhand dieser Lösungsskizze problemlos nachvollziehen können, wie man die Aufgaben richtig hätte bearbeiten können.

Aufgabe 1. (5 Punkte)

a) Siehe Skriptum.

b) Siehe Skriptum.

c) R ist keine Äquivalenzrelation. Sonst wäre R reflexiv und es müßte daher $5 \in [5]$ gelten, was nicht der Fall ist.

Aufgabe 2. (4 Punkte)

a) Sei $x \in \mathbb{Z}$. Bekanntlich ist $[x]$ eine Einheit in $R := \mathbb{Z}/100$ genau dann, wenn x zu 100 teilerfremd ist.

   Zum Beispiel sind [1], [3] und [7] Einheiten in R. Die Elemente [0], [2], [4] sind Nicht-Einheiten in R.

b) Wie viele Elemente enthält die Einheitengruppe $((\mathbb{Z}/100\mathbb{Z})^*, \cdot)$ insgesamt? - Es sind $\varphi(100)$ Stück. Wir berechnen diese Zahl. Aus dem chinesischen Restsatz folgt $\varphi(100) = \varphi(4)\varphi(25)$. Nun ist zweifelsohne $\varphi(4) = 2$. Mit der üblichen Formel folgt $\varphi(25) = \varphi(5^2) = 5 \cdot 4 = 20$. (Alternativ kann man das so sehen: Die Einheitengruppe von $\mathbb{Z}/25$ besteht aus den Restklassen $[x]$, wobei x eine zu 25 teilerfremde Zahl im Range $M := \{0, 1, \cdots, 24\}$ ist. Alle Zahlen in M außer $0, 5, 10, 15, 20$ sind zu 25 teilerfremd. Also muß $\varphi(25) = 20$ gelten.) Nun folgt $\varphi(100) = 2 \cdot 20 = 40$.

Aufgabe 3. (5 Punkte)

a) Wir wollen ein $x \in \mathbb{Z}$ berechnen, das die Gleichung

$$x \equiv 5 \bmod 9 \text{ und } x \equiv 10 \bmod 11 \quad (*)$$

   erfüllt. Erstelle eine Liste von Zahlen, die kongruent 5 modulo 9 sind: $5, 14, 23, 32, 41, \cdots$. Man sieht, daß 32 eine Lösung von $(*)$ ist.

b) Betrachte die Gleichung

$$5x + 7y = 2 \quad (*)$$

   über $\mathbb{Z}$. Wenn $(x, y) \in \mathbb{Z}^2$ eine Lsg. von $(*)$ ist, dann muß $[5][x] = [2]$ in $\mathbb{Z}/7$ gelten. Es gilt $[5]^{-1} = [3]$. Also folgt $[x] = [6] = [-1]$ in $\mathbb{Z}/7$. Daher gibt es ein $a \in \mathbb{Z}$ mit $x = -1+7a$. Die Gleichtung $(*)$ erzwingt dann $5(-1+7a)+7y = 2$, also $7y = 7 - 35a$, also $y = 1 - 5a$.

   Umgekehrt ist für jedes $a \in \mathbb{Z}$ durch $(-1+7a, 1-5a)$ eine Lsg. von $(*)$ gegeben, weil $5(-1 + 7a) + 7(1 - 5a) = -5 + 35a + 7 - 35a = 2$ gilt. Somit ist

$$L := \{(-1 + 7a, 1 - 5a) : a \in \mathbb{Z}\}$$

   die Lösungsmenge von $(*)$ über $\mathbb{Z}$.

Aufgabe 4. (6 Punkte) Siehe Skriptum.

Aufgabe 5. (6 Punkte)

a) Behauptung: Für jede natürliche Zahl $n \geq 2$ ist der vollständige Graph K_n mit n Knoten genau dann eulersch, wenn n ungerade ist.

   Beweis: Jeder Knoten in K_n hat Grad $(n-1)$, da er mit allen anderen Knoten verbunden ist. Nun ist K_n nach einem Satz der Vorlesung genau dann eulersch, wenn jeder Knoten einen geraden Grad hat. Dies ist genau dann der Fall, wenn $n - 1$ gerade ist, also genau dann, wenn n ungerade ist.

b) Behauptung: Der vollständige bipartite Graph $K_{3,3}$ ist ein Hamilton-Graph.

   Beweis: $K_{3,3}$ hat Knotenmenge $E = \{1, 1', 2, 2', 3, 3'\}$ und (9-elementige) Kantenmenge $V = \{\{i, i'\} : i \in \{1, 2, 3\}, i' \in \{1', 2', 3'\}\}$. Offenbar ist $(1, 1', 2, 2', 3, 3', 1)$ ein Hamilton-Kreis in $K_{3,3}$.

c) Behauptung: Der vollständige bipartite Graph $K_{5,2}$ ist *kein* Hamilton-Graph.

Beweis; $K_{5,2}$ hat Knotenmenge $E = A \cup B$ mit $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ und $B = \{1', 2'\}$. Kantenmenge ist $\{\{i, j\} : i \in A, j \in B\}$. Nimm an, es gäbe einen Hamilton-Kreis in $K_{5,2}$. Dann gäbe es auch einen Hamilton-Kreis

$$(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7, x_8)$$

mit $x_1 = x_8 = 1$. (Offenbar haben Hamiltonkreise in diesem Graph die Länge 8.) Dann muß aber $x_i \in B$ für alle geraden i gelten, aufgrund der Definition der Kantenmenge des Graphen. Da jeder Knoten höchstens 1-mal besucht wird erzwingt dies $\{x_2, x_4\} = B$. Dann muss aber $x_6 \notin B$ gelten, wieder da kein Knoten mehrfach besucht wird. Widerspruch.

Aufgabe 6. (4 Punkte) Man nimmt für B die Potenzmenge $B = P(\{1, 2, 3\})$. Dann gilt $|B| = 2^3 = 8$. Ferner setzt man $\oplus = \cup$ (Vereinigung), $\odot = \cap$ (Schnitt) und definiert $\neg : B \to B$ durch

$$\neg M := \{1, 2, 3\} \setminus M \quad \forall M \in B.$$

Dann ist $(B, \oplus, \odot, \neg)$ eine Boolesche Algebra nach einem entsprechenden Satz der Vorlesung.