Universität Kassel
Fachbereich 10/16

06.09.2012

Klausur: Diskrete Strukturen II

Name:	Vorname:	Matrikelnummer:	Versuch:

Unterschrift:

Bitte fangen Sie für jede Aufgabe ein neues Blatt an. Beschreiben Sie nur die Vorderseite der Blätter.

Es können maximal 35 Punkte erreicht werden.

Aufgabe 1	Aufgabe 2	Aufgabe 3	Aufgabe 4	Aufgabe 5	Aufgabe 6

Punkte:	**Note:**

Aufgabe 1. (8 Punkte)

a) Seien X und Y Mengen. Wann wird eine Teilmenge Γ von $X \times Y$ *Graph einer Abbildung von X nach Y* genannt?

b) Wir betrachten die Relation

$$R = \{(1,4),(4,1),(1,3),(3,1),(1,1),(2,2),(3,3),(4,4)\}$$

auf der Menge $\{1,2,3,4\}$. Entscheiden Sie (mit kurzer Begründung), ob R reflexiv ist, ob R symmetrisch ist und ob R transitiv ist.

c) Wir betrachten die durch

$$xTy \;:\Longleftrightarrow\; x^4 \leq y^4 \qquad (x, y \in \mathbb{Z})$$

definierte Relation T auf $\mathbb{Z}$. Ist T antisymmetrisch? Begründen Sie Ihre Antwort.

d) Sei $X = \{0,1\}$. Entscheiden Sie (mit Begründung) jeweils, ob die wie folgt definierten Verknüpfungen $\bullet : X \times X \to X$ bzw. $\cap : X \times X \to X$ assoziativ sind:

$\bullet$	0	1
0	1	0
1	1	0

$\cap$	0	1
0	1	1
1	1	1

Aufgabe 2. (8 Punkte)

a) Geben Sie drei Einheiten und drei Nicht-Einheiten des Ringes $\mathbb{Z}/777$ an.

b) Wie ist die Eulersche φ-Funktion definiert? (Wir fragen nicht nach Sätzen über diese Abbildung sondern nach der ursprünglichen Definition.)

c) Wie viele Elemente enthält die Einheitengruppe $((\mathbb{Z}/100)^{\times}, \cdot\,)$ insgesamt?

d) Die Restklasse $x := [13]_{100}$ ist eine Einheit in $\mathbb{Z}/100$. (Dies braucht nicht geprüft werden.) Berechnen Sie $x^{40000000000001}$. (Hinweis: Der Rechenaufwand ist gering, wenn man Aufgabe 2c) und den kleinen Satz von Fermat beachtet.)

Bei den Teilaufgaben a), c) und d) sind die Antworten zu begründen bzw. der Rechenweg soll in nachvollziehbarer Weise mit angegeben werden.

Aufgabe 3. (4 Punkte)

a) Berechnen Sie ein $x \in \mathbb{Z}$, das

$$x \equiv 1 \bmod 7 \text{ und } x \equiv 3 \bmod 11$$

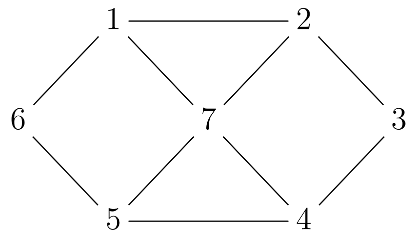
erfüllt.

b) Entscheiden Sie, ob es ein Paar $(x,y) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ mit

$$33x + 27y = 11$$

gibt und geben Sie einen stichhaltigen Beweis für die Aussage, die Sie treffen.

Aufgabe 4. (7 Punkte) Wir betrachten den in der Skizze dargestellten Graph Γ.



a) Entscheiden Sie, ob Γ hamiltonsch ist, und geben sie gegebenfalls einen Hamiltonkreis in Γ explizit an.

b) Entscheiden Sie, ob Γ eulersch ist, und geben sie gegebenfalls eine Euler-Tour in Γ explizit an.

c) Geben Sie für diesen Graphen explizit eine Knotenfärbung mit möglichst wenig Farben an. Was ist die chromatische Zahl $\chi(\Gamma)$?

In allen Teilaufgaben sind die Antworten stichhaltig zu begründen.

Aufgabe 5. (4 Punkte) Sei $\Gamma = (V, E)$ ein einfacher, *plättbarer*, zusammenhängender, endlicher Graph.

a) Wie ist die Euler-Charakteristik $c(\Gamma)$ definiert? Welchen Wert nimmt $c(\Gamma)$ immer an?

b) Was besagt der Vierfarbensatz von Apel und Haken über die chromatische Zahl $\chi(\Gamma)$?

Aufgabe 6. (4 Punkte) Wir betrachten den vollständig bipartiten Graphen $K_{10,10}$. Sei e irgendeine Kante von $K_{10,10}$ und Γ der Graph, der entsteht, wenn man in $K_{10,10}$ die Kante e entfernt. Beweisen Sie, dass Γ nicht plättbar ist.

Lösungsskizze

Aufgabe 1.

a) Siehe Skript.

b)
- R ist reflexiv, da xRx für alle $x \in M$ gilt. Es ist ja $(1,1),(2,2),(3,3),(4,4) \in M$.
- R ist symmetrisch, da für alle $(x,y) \in R$ auch $(y,x) \in R$ gilt, wie man unmittelbar sieht.
- R ist nicht transitiv. Z.B. gilt $3R1$ und $1R4$ aber nicht $3R4$.

c) *Behauptung.* T ist nicht antisymmetrisch. *Beweis.* Es gilt $(-1)T1$ und $1T(-1)$ aber nicht $-1 = 1$.

d) Es gilt $(0 \bullet 0) \bullet 0 = 1 \bullet 0 = 1$ und $0 \bullet (0 \bullet 0) = 0 \bullet 1 = 0$. Daher ist $\bullet$ nicht assoziativ.

Ferner gilt $(x \cap y) \cap z = 1$ und $x \cap (y \cap z) = 1$ für alle $x, y, z \in X$. Daher ist $\cap$ assoziativ.

Aufgabe 2.

a) Setze $\overline{x} = [x]_{777}$. Es ist $777 = 3 \cdot 7 \cdot 37$ die PFZ von 777. Nach Vorlesung gilt: Genau dann ist $\overline{x}$ Einheit in $\mathbb{Z}/777$, wenn $\mathrm{ggT}(x, 777) = 1$.

Beispiele für Einheiten in $\mathbb{Z}/777$ sind also $\overline{1}$, $\overline{2}$, $\overline{5}$, $\overline{11}$ ect.
Beispiele für Nicht-Einheiten in $\mathbb{Z}/777$ sind $\overline{0}$, $\overline{3}$, $\overline{6}$, $\overline{7}$, $\overline{37}$ ect.

b) Siehe Skript.

c) Es sind

$$\varphi(100) = \varphi(2^2 \cdot 5^2) = 2(2-1)5(5-1) = 40$$

Stück.

d) Nach dem Satz von Fermat gilt $x^{\varphi(100)} = x^{40} = [1]$, da 13 zu 100 teilerfremd ist. Also ist auch $x^{40k} = [1]$ für jedes $k \in \mathbb{Z}$. Daher

$$x^{40000000000001} = x^{40000000000000+1} = x^{40000000000000} x = x = [13]_{100}.$$

Aufgabe 3.

a) Durch Raten sieht man, dass $x = 36$ die beiden Kongruenzen erfüllt.

b) Es gibt *kein* Paar $(x,y) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ mit $33x + 27y = 11$, denn sonst wäre wegen $11 = 3 \cdot (11x + 9y)$ die Zahl 11 durch 3 teilbar, was nicht der Fall ist.

Aufgabe 4.

a) Γ ist hamiltonsch. Durch $(1, 2, 3, 4, 7, 5, 6, 1)$ ist ein Hamilton-Kreis in Γ gegeben.

b) In Γ gibt es Knoten von ungeradem Grad. (Z.B. hat der Knoten 1 Grad 3.) Deshalb kann Γ nach einem Satz der Vorlesung nicht eulersch sein.

c) Da Γ ein Dreieck (z.B. das mit Knoten $1, 2, 7$) enthält, dessen Knoten unterschiedlich gefärbt werden müssen, hat Γ keine Knotenfärbung mit < 3 Farben. Es gilt $\chi(\Gamma) \geq 3$. Wir geben eine Knotenfärbung mit 3 Farben an:

1	2	3	4	5	6	7
rot	gelb	blau	gelb	rot	blau	blau

Insgesamt folgt $\chi(\Gamma) = 3$.

Aufgabe 5. Siehe Skript.

Aufgabe 6. Der Graph $K_{10,10}$ hat $e(K_{10,10}) = 10^2 = 100$ Kanten. Daher hat Γ genau $e(\Gamma) = 99$ Kanten und $v(\Gamma) = 20$ Knoten. Wäre Γ plättbar, so müsste nach Vorlesung $e(\Gamma) \leq 3v(\Gamma) - 6$ also $99 \leq 54$ gelten, was nicht der Fall ist.