15. September 2010 Prof. Dr. W. Bley

UNIVERSITÄT KASSEL

Klausur SS 2010 Diskrete Strukturen I (Informatik)

1	2	3	4	5	6	$\sum$

Name:...

Matr.-Nr.:...

Viel Erfolg!

Aufgabe 1 **(4 Punkte)**

Es sei $a_0 = -1, a_1 = 4$ und $a_n = 7a_{n-1} - 6a_{n-2}$ für $n \geq 2$. Zeigen Sie durch vollständige Induktion, dass $a_n = 6^n - 2$ für alle $n \geq 0$ gilt.

Lösungsvorschlag: Induktionsanfang: Für $n = 0$ ergibt sich $6^n - 2 = 6^0 - 2 = -1$ und für $n = 1$ erhält man $6^n - 2 = 6^1 - 2 = 4$, übereinstimmend mit den angegebenen Werten für a_0 und a_1. Man beachte, daß man den Induktionsanfang für zwei aufeinanderfolgende Werte von n verifizieren muss (siehe Gleichung (*) im Induktionsschritt).

Induktionsschritt "$n \to n + 1$":

$$\begin{aligned}
a_{n+1} &= 7a_n - 6a_{n-1} \\
&\overset{(*)}{=} 7(6^n - 2) - 6(6^{n-1} - 2) \\
&= 7 \cdot 6^n - 14 - 6^n + 12 \\
&= 6 \cdot 6^n - 2 \\
&= 6^{n+1} - 2.
\end{aligned}$$

Aufgabe 2 **(8 Punkte)**

Eine Urne enthält sechs rote, drei grüne und fünf blaue Kugeln (und sonst nichts mehr). Man zieht zufällig ohne Zurücklegen nacheinander zwei Kugeln aus der Urne.

(a) Mit welcher Wahrscheinlichkeit ist die erste gezogene Kugel rot, wenn die zweite gezogene Kugel grün ist.

(b) Mit welcher Wahrscheinlichkeit sind die beiden gezogenen Kugeln gleichfarbig? Sind bei diesem Experiment die zwei Ereignisse "die erste gezogene Kugel ist blau" und "die beiden gezogenen Kugeln sind gleichfarbig" abhängig oder unabhängig?

Lösungsvorschlag: R_1 sei das Ereignis "Die erste Kugel ist rot", B_1 das Ereignis "Die erste Kugel ist blau" und G_1 das Ereignis "Die erste Kugel ist grün". Analog definiert man R_2, B_2 und G_2.

a) Zu berechnen ist die bedingte Wahrscheinlichkeit $P_{G_2}(R_1) = \frac{P(G_2 \cap R_1)}{P(G_2)}$. Man erhält (mit offensichtlicher Notation):

$$P_{G_2}(R_1) = \frac{P(\{(r,g)\})}{P(\{(r,g),(b,g),(g,g)\})} = \frac{\frac{6}{14} \cdot \frac{3}{13}}{\frac{6}{14} \cdot \frac{3}{13} + \frac{5}{14} \cdot \frac{3}{13} + \frac{3}{14} \cdot \frac{2}{13}} = \frac{6}{13}.$$

b) Sei nun A das Ereignis "Beide Kugeln sind gleichfarbig". Es gilt:

$$P(A) = P(\{(r,r),(g,g),(b,b)\}) = \frac{6}{14} \cdot \frac{5}{13} + \frac{3}{14} \cdot \frac{2}{13} + \frac{6}{14} \cdot \frac{5}{13} = \frac{4}{13}.$$

Analog erhält man

$$P(B_1) = P(\{(b,r),(b,g),(b,b)\}) = \frac{5}{14}.$$

Wegen

$$P(A \cap B_1) = P(\{(b,b)\}) = \frac{5 \cdot 4}{14 \cdot 13} = P(A)P(B_1)$$

sind die beiden Ereignisse unabhängig.

Aufgabe 3 **(4 Punkte)**

Finden Sie eine explizite Lösungsformel für die Folgenglieder x_n, die rekursiv gegeben sind durch

$$x_n = 10x_{n-1} - 25x_{n-2} \text{ für } n \geq 2,$$

und zusätzlich die Bedingungen

$$x_1 = 5, \quad x_2 = 75$$

erfüllen.

Berechnen Sie x_0.

Lösungsvorschlag: Für das charakteristische Polynom erhält man

$$c(x) = x^2 - 10x + 25 = (x-5)^2.$$

Der Ansatz $x_n = (\alpha + n\beta) \cdot 5^n$ führt zu den beiden Gleichungen

$$\begin{aligned} (\alpha + \beta) \cdot 5 &= 5 \\ (\alpha + 2\beta) \cdot 25 &= 75. \end{aligned}$$

Dieses lineare Gleichungssystem hat die Lösung $\alpha = -1, \beta = 2$. Also gilt: $x_n = (-1 + 2n) \cdot 5^n$ und man berechnet $x_0 = -1$.

Aufgabe 4 **(6 Punkte)**

Es sei $X\colon \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ folgende Zufallsvariable: Der Wahrscheinlichkeitsraum Ω sei $\{1,2,3\} \times \{1,2,3\}$ mit der Gleichverteilung, d.h. jedes Elementarereignis hat die Wahrscheinlichkeit $1/9$; die Funktion X sei gegeben durch

$$X((i,j)) = |i-j|.$$

Berechnen Sie den Erwartungswert $E(X)$ und die Varianz $V(X)$ sowie den Wert $P(|X - E(X)| \geq t) - V(X)/t^2$ für $t = \frac{2}{9}$.

Liefert die Chebychev'sche Ungleichung in diesem Fall wertvolle Informationen, und wenn ja, welche?

Lösungsvorschlag: Man hat die folgende Wertetabelle:

(i,j)	$(1,1)$	$(1,2)$	$(1,3)$	$(2,1)$	$(2,2)$	$(2,3)$	$(3,1)$	$(3,2)$	$(3,3)$
X	0	1	2	1	0	1	2	1	0

Für den Erwartungswert von X ergibt sich hieraus

$$E(X) = 0 \cdot \frac{3}{9} + 1 \cdot \frac{4}{9} + 2 \cdot \frac{2}{9} = \frac{8}{9}.$$

Ferner berechnet man

$$E(X^2) = 0 \cdot \frac{3}{9} + 1 \cdot \frac{4}{9} + 4 \cdot \frac{2}{9} = \frac{12}{9}$$

und hieraus

$$V(X) = E(X^2) - E(X)^2 = \frac{44}{81}.$$

Weiterhin ist

$$P(|X - E(X)| \geq \frac{2}{9}) = P(X = 0) + P(X = 2) = \frac{5}{9}.$$

Der in der Chebychev'schen Ungleichung betrachtete Wert berechnet sich zu

$$P(|X - E(X)| \geq \frac{2}{9}) - \frac{V(X)}{t^2} = -\frac{94}{9}.$$

Man beachte, dass die Aussage der Chebychev'schen Ungleichung äquivalent dazu ist, dass dieser Wert < 0 ist. Da in diesem Beispiel $\frac{V(X)}{t^2} = 11 > 1$ gilt, liefert die Chebychev'schen Ungleichung allerdings keine verwertbare Aussage.

Aufgabe 5 **(6 Punkte)**

(a) Definieren Sie die Begriffe "injektiv" und "surjektiv".

(b) Wie üblich sei $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \ldots\}$ und $\mathbb{Z} = \{0, \pm 1, \pm 2, \ldots\}$.

(i) Gibt es eine injektive Abbildung $f\colon \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{Z}$?

(ii) Gibt es eine surjektive Abbildung $g\colon \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{Z}$?

(iii) Gibt es eine injektive Abbildung $h\colon \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{N}$?

Begründen Sie Ihre Antworten sorgfältig!

Lösungsvorschlag:

a) Eine Abbildung $f : A \longrightarrow B$ ist injektiv, falls aus $f(a_1) = f(a_2)$ stets $a_1 = a_2$ folgt. Eine Abbildung $f : A \longrightarrow B$ heißt surjektiv, wenn es zu jedem $b \in B$ ein $a \in A$ mit $f(a) = b$ gibt.

b) (i) Ja, z.B. die Identität.

(ii) Ja, z.B. die Abbildung

$$g(n) = \begin{cases} \frac{n-1}{2}, & n \text{ ungerade}, \\ -\frac{n}{2}, & n \text{ gerade}, \end{cases}$$

Sei nämlich $z \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$. Dann ist $g(2z+1) = z$. Sei $z \in \mathbb{Z}_{<0}$. Dann ist $g(-2z) = z$.

(iii) Die obige Abbildung g ist auch injektiv. Begründung: Sei $g(n) = g(m)$. Falls n gerade ist, so muss auch m gerade sein und weiter $-n/2 = -m/2$ gelten. Es folgt sofort $n = m$. Falls n ungerade ist, so muss auch m ungerade sein und weiter $(n-1)/2 = (m-1)/2$ gelten. Es folgt ebenfalls $n = m$.

Damit ist also g eine Bijektion und die Abbildung $h := g^{-1}$ ist eine injektive Abbildung von $\mathbb{Z}$ nach $\mathbb{N}$. (Natürlich ist h auch surjektiv.)

Aufgabe 6 **(4 Punkte)**

(a) Geben Sie die Menge aller Permutationen von $\{1, 2, 3, 4\}$ an, die genau zwei Fixpunkte haben.

(b) Mit welcher Wahrscheinlichkeit läßt sich eine Permutation von $\{1, 2, 3, 4\}$ als Produkt von genau zwei disjunkten Zyklen schreiben?

Lösungsvorschlag: a) Die folgenden Permutationen haben genau zwei Fixpunkte

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 3 & 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 2 & 1 & 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 2 & 3 & 1 \end{pmatrix},$$
$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 3 & 2 & 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 4 & 3 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 4 & 3 \end{pmatrix}$$

In Zyklenschreibweise entspricht dies den Elementen

$$(1, 2), (1, 3), (1, 4), (2, 3), (2, 4), (3, 4).$$

b) Folgende Permutationen lassen sich als Produkt von genau zwei disjunkten Zyklen schreiben:

$$\begin{aligned}
&(1)(2, 3, 4), (1)(2, 4, 3), (2)(1, 3, 4), (2)(1, 4, 3),\\
&(3)(1, 2, 4), (3)(1, 4, 2), (4)(1, 2, 3), (4)(1, 3, 2),\\
&(1, 2)(3, 4), (1, 3)(2, 4), (1, 4)(2, 3).
\end{aligned}$$

Insgeamt gibt es $4! = 24$ verschiedene Zyklen. Nimmt man eine Gleichverteilung an, so ist die gesuchte Wahrscheinlichkeit gegeben durch $\frac{11}{24}$.

Man kann dies auch mit Hilfe der ersten Stirlingzahl berechnen. Es gilt $s_{4,2} = 11$.