Sommersemester 2004 22.9.2004

# Diskrete Strukturen I, Klausur

| Name | Vorname | Matrikelnummer |
|---|---|---|
| | | |

| Aufgabe | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | $\sum$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Punkte | | | | | | | | |

Bitte schreiben Sie auf jeden Zettel, den Sie abgeben, deutlich Ihren Namen.

**Aufgabe 1.** (*5 Punkte)* Entscheiden Sie, ob die folgenden Aussagen richtig oder falsch sind. Für jede richtige Entscheidung gibt es einen halben Punkt, für jede falsche wird ein halber Punkt abgezogen, jedoch werden insgesamt nicht weniger als 0 Punkte vergeben.

| | richtig | falsch |
|---|---|---|
| (a) Falls jede natürliche Zahl gerade ist, so liegt Kassel in Bayern. | ☐ | ☐ |
| (b) Ist $M$ eine Menge mit $n$ Elementen, so gibt es $n^2$ verschiedene bijektive Abbildungen von $M$ nach $M$. | ☐ | ☐ |
| (c) Eine Abbildung ist genau dann nicht injektiv, wenn es mindestens eine Urbildmenge mit mehr als einem Element gibt. | ☐ | ☐ |
| (d) Eine Menge mit 5 Elementen hat genauso viele zweielementige wie dreielementige Teilmengen. | ☐ | ☐ |
| (e) In jeder Menge mit mindestens 8 Elementen gibt es mehr sechselementige als fünfelementige Teilmengen. | ☐ | ☐ |
| (f) Für jedes $n \in \mathbb{N}$ gilt $s_{n,n} = 1$. | ☐ | ☐ |
| (g) Jeder plättbare Graph mit vier Ecken enthält $V_4$ als Teilgraphen. | ☐ | ☐ |
| (h) Die erzeugende Funktion $\sum_{n\geq 0} x^n$ ist invertierbar. | ☐ | ☐ |
| (i) Die erzeugende Funktion $\sum_{n\geq 0} x^{2n+1}$ ist invertierbar. | ☐ | ☐ |
| (j) Die Ableitung einer erzeugenden Funktion ist invertierbar. | ☐ | ☐ |

**Aufgabe 2.** (*4 Punkte)* Es seien $M$ eine Menge und $f : M \to M$ eine Abbildung. Zeigen Sie: $f$ ist genau dann injektiv, wenn für alle Abbildungen $g_1, g_2 : M \to M$ gilt:

$$f \circ g_1 = f \circ g_2 \quad \Longrightarrow \quad g_1 = g_2.$$

**Aufgabe 3.** (*2 Punkte)* Zeigen Sie mit Induktion, dass für alle Mengen $A_1, \ldots, A_n$ und $B$ gilt

$$(A_1 \cup \cdots \cup A_n) \cap B = (A_1 \cap B) \cup \cdots \cup (A_n \cap B).$$

**Aufgabe 4.** (*3 Punkte)* Finden Sie einen geschlossenen Ausdruck für die erzeugende Funktion

$$A(x) = \sum_{n \geq 0} (n+1)^2 x^n.$$

**Aufgabe 5.** (*7 Punkte)* Geben Sie eine explizite Formel für die durch folgende Rekursionsgleichung definierte Folge an:

$$a_0 = 1, \quad a_1 = 0, \quad a_2 = 2 \quad \text{und} \quad a_n = 7a_{n-2} - 6a_{n-3} \text{ für } n \geq 3.$$

**Aufgabe 6.** (*2+2+3 Punkte)* Aus der Vorlesung ist bekannt, dass $V_n$ nur für $n \leq 4$ plättbar ist. Für $n \geq 5$ kann man durch Entfernen von Kanten plättbare Teilgraphen erhalten. Es sei $k(n)$ die maximale Anzahl von Kanten, die ein solcher Teilgraph von $V_n$ haben kann.

(a) Zeigen Sie: $k(5) = 9$.

(b) Bestimmen Sie $k(6)$.

(c) Entwickeln Sie eine Formel für $k(n)$. (*Hinweis:* Verwenden Sie die Eulersche Formel.)

**Aufgabe 7.** (*4+2 Punkte)* Ein Dozent macht gern eine Tour zwischen seinen drei Lieblingskneipen. Dabei trinkt er ausschließlich Krefelder oder Weizen. Im Ulenspiegel, wo er so oft einkehrt wie in den beiden anderen Kneipen zusammen, trinkt er in 75 % der Fälle Krefelder. Im b2 (hier ist er doppelt so häufig anzutreffen wie im Limerick) trinkt er beides gleich häufig, im Limerick aber ist das Altbier schrecklich, daher trinkt er hier fünfmal häufiger Weizen als Krefelder.

(a) Eines Abends wacht er in einer Kneipe auf, sieht vor sich ein Weizen stehen, kann sich aber nicht weiter orientieren. Wo befindet er sich aller Wahrscheinlichkeit nach?

(b) An einem anderen Abend passiert ihm dasselbe – aber diesmal steht vor ihm ein Krefelder. Verschwommen meint er wahrzunehmen, dass er sich im Limerick befindet, obwohl er dort kaum Krefelder trinkt. Mit welcher Wahrscheinlichkeit hat er trotzdem Recht?

# Musterlösung zur Klausur Diskrete Strukturen I

**Aufgabe 1:**

| | richtig | falsch |
|---|---|---|
| (a) Falls jede natürliche Zahl gerade ist, so liegt Kassel in Bayern. | ⊠ | ☐ |
| (b) Ist $M$ eine Menge mit $n$ Elementen, so gibt es $n^2$ verschiedene bijektive Abbildungen von $M$ nach $M$. | ☐ | ⊠ |
| (c) Eine Abbildung ist genau dann nicht injektiv, wenn es mindestens eine Urbildmenge mit mehr als einem Element gibt. | ⊠ | ☐ |
| (d) Eine Menge mit 5 Elementen hat genauso viele zweielementige wie dreielementige Teilmengen. | ⊠ | ☐ |
| (e) In jeder Menge mit mindestens 8 Elementen gibt es mehr sechselementige als fünfelementige Teilmengen. | ☐ | ⊠ |
| (f) Für jedes $n \in \mathbb{N}$ gilt $s_{n,n} = 1$. | ⊠ | ☐ |
| (g) Jeder plättbare Graph mit vier Ecken enthält $V_4$ als Teilgraphen. | ☐ | ⊠ |
| (h) Die erzeugende Funktion $\sum_{n\geq 0} x^n$ ist invertierbar. | ⊠ | ☐ |
| (i) Die erzeugende Funktion $\sum_{n\geq 0} x^{2n+1}$ ist invertierbar. | ☐ | ⊠ |
| (j) Die Ableitung einer erzeugenden Funktion ist invertierbar. | ☐ | ⊠ |

**Aufgabe 2:** Zu zeigen sind zwei Richtungen.

Wir nehmen zuerst an, $f$ ist injektiv. Nach Übungsblatt 2, Aufgabe 3, existiert eine Abbildung $g : M \to M$, so dass $g \circ f = id_M$. Dann erhalten wir:

$$f \circ g_1 = f \circ g_2 \Rightarrow g \circ f \circ g_1 = g \circ f \circ g_2 \Rightarrow id_M \circ g_1 = id_M \circ g_2 \Rightarrow g_1 = g_2.$$

Die Rückrichtung zeigen wir indirekt: Wäre $f$ nicht injektiv, so gäbe es $x, y \in M$ mit $x \neq y$ und $f(x) = f(y)$. Wir betrachten dann die beiden konstanten Abbildungen $g_1(z) = x$ und $g_2(z) = y$ (für alle $z \in M$). Dann gilt zwar $f \circ g_1 = f \circ g_2$, aber es gilt nicht $g_1 = g_2$.

**Aufgabe 3:** (a) Wir betrachten einen plättbaren Teilgraphen von $V_5$ mit maximaler Kantenanzahl $k(5)$. Es ist klar, dass dieser Teilgraph $e = 5$ Ecken hat und dass die Flächen allesamt Dreiecke sind. Dies bedeutet, dass zu jeder Fläche drei Kanten gehören, von denen aber dann jede doppelt gezählt wurde. Also gilt: $3f = 2k(5)$. Nach der Eulerformel $e - k(5) + f = 2$ erhält man dann $5 - k(5) + \frac{2}{3}k(5) = 2$, also $k(5) = 9$.

(b) Wie oben erhält man mit $e = 6$ den Wert $k(6) = 12$.

(c) Allgemein folgt mit den analogen Überlegungen:

$$n - k(n) + \frac{2}{3}k(n) = 2, \qquad \text{also} \qquad k(n) = 3(n-2).$$

**Aufgabe 4:** Für $n = 1$ ergibt sich $A_1 \cap B = A_1 \cap B$, was sicher stimmt. Wenn wir annehmen, dass die Aussage für $n$ richtig ist, dann betrachten wir

$$A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n \cup A_{n+1}$$

als Vereinigung von $n$ Mengen, indem wir $A_n \cup A_{n+1}$ als eine Menge auffassen. Nach Induktionsvoraussetzung gilt dann

$$(A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup (A_n \cup A_{n+1})) \cap B = (A_1 \cap B) \cup \cdots \cup ((A_n \cup A_{n+1}) \cap B).$$

Wir wenden auf die letzte Menge das Distributivgesetz von $\cap$ und $\cup$ an (Lemma 1.4 aus der Vorlesung):

$$(A_n \cup A_{n+1}) \cap B = (A_n \cap B) \cup (A_{n+1} \cap B).$$

Insgesamt gilt damit

$$(A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n \cup A_{n+1}) \cap B = (A_1 \cap B) \cup \cdots \cup (A_n \cap B) \cup (A_{n+1} \cap B).$$

**Aufgabe 5:** Wir machen den üblichen Ansatz $A(x) = \sum_{n\geq 0} a_n x^n$ und erhalten nach Einsetzen der Folgenglieder:

$$\begin{aligned} A(x) = 1 + 2x^2 + 7\sum_{n\geq 3} a_{n-2}x^n - 6\sum_{n\geq 3} a_{n-3}x^n &= 1 + 2x^2 + 7x^2\sum_{n\geq 1} a_n x^n - 6x^3 \sum_{n\geq 0} a_n x^n \\ &= 1 + 2x^2 + 7x^2(A(x) - 1) - 6x^3 A(x). \end{aligned} \tag{1}$$

Also ergibt sich

$$A(x) = \frac{1-5x^2}{1-7x^2+6x^3} = \frac{1-5x^2}{(1-x)(1-2x)(1+3x)}.$$

Mit Partialbruchzerlegung erhalten wir

$$A(x) = \frac{1}{1-x} + \frac{-\frac{1}{5}}{1-2x} + \frac{\frac{1}{5}}{1+3x} = \sum_{n\geq 0}\left(1 - \frac{1}{5}2^n + \frac{1}{5}(-3)^n\right)x^n,$$

also $a_n = 1 - \frac{1}{5}2^n + \frac{1}{5}(-3)^n$.

**Aufgabe 6:**

$$\begin{aligned} \sum_{n\geq 0}(n+1)^2 x^n = \sum_{n\geq 0} n^2 x^n + 2\sum_{n\geq 0} n x^n + \sum_{n\geq 0} x^n &= \frac{x(1+x)}{(1-x)^3} + \frac{2x}{(1-x)^2} + \frac{1}{1-x} \\ &= \frac{x(1+x) + 2x(1-x) + (1-x)^2}{(1-x)^3} = \frac{1+x}{(1-x)^3}. \end{aligned} \tag{2}$$

(Die geschlossenen Ausdrücke für die drei Teilreihen sind alle aus der Vorlesung bekannt.)

**Aufgabe 7:** Wir haben die folgenden Werte gegeben:

$P(U) = \frac{1}{2}$ , $P_U(K) = \frac{3}{4}$, also $P_U(W) = \frac{1}{4}$

$P(b2) = \frac{1}{3}$ , $P_{b2}(K) = \frac{1}{2}$, also $P_{b2}(W) = \frac{1}{2}$

$P(L) = \frac{1}{6}$ , $P_U(K) = \frac{1}{6}$, also $P_L(W) = \frac{5}{6}$

Daraus berechnen wir nach der Formel von der vollständigen Wahrscheinlichkeit:

$$\begin{aligned} P(W) &= P(U)P_U(W) + P(b2)P_{b2}(W) + P(L)P_L(W) \\ &= \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{4} + \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2} + \frac{1}{6}\cdot\frac{5}{6} = \frac{31}{72}. \end{aligned}$$

Entsprechend ergibt sich

$$P(L) = 1 - P(W) = \frac{41}{72}.$$

(a) Wir berechnen

$$P_W(U) = \frac{P_U(W)P(U)}{P(W)} = \frac{\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{2}}{\frac{31}{72}} = \frac{9}{31}.$$

und analog

$$P_W(b2) = \frac{12}{31} \qquad \text{und} \qquad P_W(L) = \frac{10}{31}.$$

Daher befindet sich der Dozent aller Wahrscheinlichkeit nach im b2.

(b) Hier ist nur gesucht

$$P_K(L) = \frac{P_L(K)P(L)}{P(K)} = \frac{\frac{1}{6}\cdot\frac{1}{6}}{\frac{41}{72}} = \frac{2}{41},$$

also hat er mit einer Wahrscheinlichkeit von $\frac{2}{41}$ Recht.