KLAUSUR

Differenzialgleichungen

2.09.2011

(W. Strampp)

Name:	Vorname:	Matr.–Nr.:	Studiengang:

Für jede Aufgabe gibt es 8 Punkte. Zum Bestehen der Klausur sollten 16 Punkte erreicht werden.

1)	2)	3)	4)

Punkte:	Note:

Fangen Sie für jede Aufgabe ein neues Blatt an.
Beschreiben Sie nur die Vorderseite der Blätter.
Geben Sie alle Rechenschritte an!

1. (a) Diskutieren Sie die Stabilität der Nulllösung $\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ bei folgenden Systemen:

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ -1 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & -3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}.$$

   (b) Diskutieren Sie die Stabilität der Nulllösung $y(x) = 0$ bei der Gleichung:

$$y''' + 3\,y'' + 4\,y' + 2\,y = 0\,.$$

2. (a) Diskutieren Sie die Stabilität der Nulllösung $\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ bei dem System:

$$x' = -y - y^3\,, \quad y' = x\,.$$

   Hinweis: Betrachten Sie die Differenzialgleichung $\dfrac{dy}{dx} = -\dfrac{x}{y + y^3}$.

   (b) Zeigen Sie die asymptotische Stabilität der Nulllösung $\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ bei dem System:

$$x' = -x^3 - y\,, \quad y' = x - y^3$$

   mithilfe der Ljapunow-Funktion $V(x, y) = x^2 + y^2$.

3. Gegeben sei das folgende Anfangsrandwertproblem für die schwingende Saite:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\,,$$

$$u(0, t) = u(1, t) = 0\,, \quad u(x, 0) = \sin(3\,\pi\,x)\,, \quad \frac{\partial u}{\partial t}(x, 0) = \sin(5\,\pi\,x)\,,$$

   für $0 \leq x \leq 1$, $0 \leq t$. Lösen Sie das Problem mit der Fourier- und mit der d'Alembert-Methode.

4. Lösen Sie das folgende Anfangswertproblem für die Wärmeleitungsgleichung

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\,, \quad u(x, 0) = e^{-|x|}\,, \quad x \in \mathbb{R}\,, 0 \leq t\,.$$

Lösungen

1a)

$$\det\begin{pmatrix}-2-\lambda & 1\\ -1 & -3-\lambda\end{pmatrix} = \lambda^2 + 5\,\lambda + 7 = 0$$

$$\lambda_1 = -\frac{5}{2} + \frac{\sqrt{5}}{2}\,i\,,\quad \lambda_2 = -\frac{5}{2} - \frac{\sqrt{5}}{2}\,i\,,$$

Realteil < 0, Nulllösung asymptotisch stabil.

$$\det\begin{pmatrix}-2-\lambda & -3\\ 1 & 2\lambda\end{pmatrix} = \lambda^2 - 1 = 0$$

$$\lambda_1 = -1\,,\quad \lambda_2 = 1\,,$$

Realteil $\lambda_2 > 0$, Nulllösung instabil.

1b)

$$\lambda^3 + 3\,\lambda^2 + 4\,\lambda + 2 = 0$$

$$\lambda_1 = -1\,, \lambda_2 = -1 + i\,, \lambda_3 = -1 + i\,,$$

Alle Realteile < 0. Asymptotische Stabilität.

2a)

$$\frac{dy}{dx} = \frac{-x}{y+y^3}\,,\quad (y+y^3)\,dy = -x\,dx\,,$$

$$\frac{y^2}{2} + \frac{y^4}{4} = -\frac{x^2}{2} + c$$

$$x^2 + y^2 + \frac{y^4}{2} = 2\,c$$

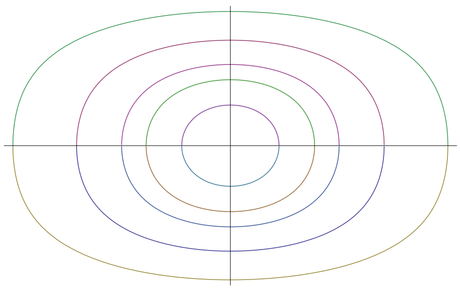
$c > 0$.

$$-\sqrt{2\,c} \le x \le \sqrt{2\,c}\,,\quad -\sqrt{-1+\sqrt{1+4\,c}} \le y \le \sqrt{-1+\sqrt{1+4\,c}}\,.$$

Trajektorien verlaufen auf geschlossenen Kurven, die man in Kreise mit dem Radius:

$$\max\{\sqrt{2\,c}, \sqrt{-1+\sqrt{1+4\,c}}\}$$

einschließen kann. Es folgt: Stabilität.



Die Kurven

$$x^2 + y^2 + \frac{y^4}{2} = 2\,c$$

2b)

$$\frac{\partial V}{\partial x}(x,y)\,(-x^3 - y) + \frac{\partial V}{\partial y}(x,y)\,(x - y^3) = -2\,x^4 - 2\,y^4 < 0$$

für $(x,y) \neq (0,0)$.

3) Fourier:

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} (C_n\, \cos(n\,\pi\,t) + D_n\, \sin(n\,\pi\,t))\, \sin(n\,\pi\,x)\,.$$

$$f(x) = \sin(3\,\pi\,x) = \sum_{n=1}^{\infty} C_n\, \sin(n\,\pi\,x)\,.$$

$$g(x) = \sin(5\,\pi\,x) = \sum_{n=1}^{\infty} D_n\, n\,\pi\, \sin(n\,\pi\,x)\,.$$

$$u(x,t) = \cos(3\,\pi\,t)\, \sin(3\,\pi\,x) + \frac{1}{5\,\pi}\, \sin(5\,\pi\,t)\, \sin(5\,\pi\,x)$$

d'Alembert:

$$u(x,t) = \frac{1}{2}\, \sin(3\,\pi\,(x+t)) + \frac{1}{2}\, \sin(3\,\pi\,(x-t)) + \frac{1}{2}\int_{x-t}^{x+t} \sin(5\,\pi\,\xi)\, d\xi$$

$$u(x,t) = \frac{1}{2}\, \sin(3\,\pi\,(x+t)) + \frac{1}{2}\, \sin(3\,\pi\,(x-t)) - \frac{1}{10\,\pi}\, \cos(5\,\pi\,(x+t)) + \frac{1}{10\,\pi}\, \cos(5\,\pi\,(x-t))$$

4)

$$u(x,t) = 2\int_0^{\infty} (A(\omega)\, \cos(\omega\,x) + B(\omega)\, \sin(\omega\,x))\, e^{-\omega^2\,t}\, d\omega\,,$$

$$
\begin{aligned}
A(\omega) &= \frac{1}{2\,\pi} \int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{-|\xi|}\, \cos(\omega\,\xi)\, d\xi = \frac{1}{\pi} \int\limits_{0}^{\infty} e^{-\xi}\, \cos(\omega\,\xi)\, d\xi = \frac{1}{\pi}\, \frac{1}{1+\omega^2} \\
B(\omega) &= \frac{1}{2\,\pi} \int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{-|\xi|}\, \sin(\omega\,\xi)\, d\xi = 0\,.
\end{aligned}
$$