KLAUSUR

Differentialgleichungen

3.09.2012

(W. Strampp)

Name:	Vorname:	Matr.–Nr.:	Studiengang:

Für jede Aufgabe gibt es 8 Punkte. Zum Bestehen der Klausur sollten 16 Punkte erreicht werden.

1)	2)	3)	4)

Punkte:	Note:

Fangen Sie für jede Aufgabe ein neues Blatt an.
Beschreiben Sie nur die Vorderseite der Blätter.
Geben Sie alle Rechenschritte an!

1. (a) Diskutieren Sie die Stabilität der Nulllösung
$\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ bei folgenden Systemen:

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} ,$$

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & -1 \\ 1 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} .$$

(b) Zeigen Sie die asymptotische Stabilität der Nulllösung
$\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ bei dem System:

$$x' = -x^3 - y \,,$$

$$y' = x - y^3$$

mithilfe der Ljapunow-Funktion $V(x, y) = x^2 + y^2$.

2. Diskutieren Sie die Stabilität der Nulllösung
$\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ bei dem System:

$$x' = -y^3 \,,$$

$$y' = x$$

(a) mit der Methode der Linearisierung,

(b) mit der Einzelgleichung:

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{x}{y^3} \,.$$

Bitte wenden!

3. Gegeben sei das Anfangsrandwertproblem

$$3\,\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 4\,\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\,,$$

$$u(x,0) = \sin(\pi\,x)\,,\,\frac{\partial u}{\partial t}u(x,0) = \sin(2\,\pi\,x)\,,$$
$$u(0,t) = u(1,t) = 0\,.$$

(a) Lösen Sie das Problem mit der Methode von d'Alembert.

(b) Lösen Sie das Problem mit der Fourier-Methode.

(c) Geben Sie das Abhängigkeitsgebiet des Punktes $(x,t) = (1,2)$ an.

4. Gegeben sei die Differentialgleichung

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2\,\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = u\,.$$

(a) Setzen Sie die Funktion

$$u(x,y) = F(x)\,G(y)$$

in die gegebene Differentialgleichung ein und separieren Sie.
Leiten Sie Differentialgleichungen für $F(x)$ und $G(y)$ her.

(b) Welche Bedingungen ergeben sich für $F(x)$ aus den Randbedingungen

$$u(0,y) = u(a,y) = 0?$$

(c) Welche Lösungen ergeben sich damit für die Differentialgleichungen aus (a)?

Lösungen

1a)

$$\det \begin{pmatrix} 2-\lambda & 1 \\ 1 & -3-\lambda \end{pmatrix} = \lambda^2 + \lambda - 7 = 0$$

$$\lambda = -\frac{1}{2} \pm \frac{1}{2}\sqrt{29}\,,$$

Realteil $\lambda > 0$, Nulllösung ist instabil.

$$\det \begin{pmatrix} -2-\lambda & -1 \\ 1 & -3-\lambda \end{pmatrix} = \lambda^2 + 5\,\lambda + 7 = 0$$

$$\lambda = -\frac{5}{2} \pm \frac{\sqrt{3}}{2}\,i\,,$$

Realteil $\lambda < 0$, Nulllösung ist asymptotisch stabil.

1b)

$$\begin{aligned} & \frac{\partial V}{\partial x}(x,y)\,(-x^3-y) + \frac{\partial V}{\partial y}(x,y)\,(x-y^3) \\ = \quad & -2\,x^4 - 2\,y^4\,. \end{aligned}$$

$V(x,y) > 0$, $(x,y) \neq (0,0)$, $\frac{d}{dt}V(x(t),y(t)) < 0$, $(x,y) \neq (0,0)$.
Die Nulllösung ist asymptotisch stabil.

2a) Die Jacobi-Matrix der rechten Seite im Nullpunkt lautet:

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

mit den Eigenwerten: $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$. Mit der Linearisierung ist keine Stabilitätsaussage möglich.

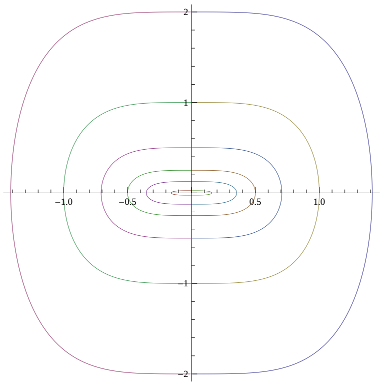
2b)

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{x}{y^3}\,.$$

$$\int y^3\,dy = -\int x\,dx$$

$$\frac{y^4}{4} + \frac{x^2}{2} = c\,, c \geq 0\,.$$

Die Lösungen verlaufen im Phasenraum auf geschlossenen Kurven um den Nullpunkt. Die Kurven können in beliebig kleine Kreise eingeschlossen werden. Die Nulllösung ist stabil.



Die Kurven $\frac{y^4}{4} + \frac{x^2}{2} = c$

3)

$$c^2 = \frac{4}{3}\,, c = \frac{2}{\sqrt{3}}\,, l = 1\,, \lambda_n = \frac{2}{\sqrt{3}}\,n\,\pi\,.$$

(a)

$$u(x,t) = \frac{1}{2}\left(\sin\left(\pi\,(x + \frac{2}{\sqrt{3}}\,t)\right) + \sin\left(\pi\,(x - \frac{2}{\sqrt{3}}\,t)\right)\right) + \frac{\sqrt{3}}{4}\int\limits_{x-\frac{2}{\sqrt{3}}\,t}^{x+\frac{2}{\sqrt{3}}\,t} \sin(2\,\pi\,\xi)\,d\xi$$

$$\begin{aligned} u(x,t) \quad = \quad & \frac{1}{2}\left(\sin\left(\pi\,(x + \frac{2}{\sqrt{3}}\,t)\right) + \sin\left(\pi\,(x - \frac{2}{\sqrt{3}}\,t)\right)\right) \\ & + \frac{\sqrt{3}}{8\,\pi}\left(\cos\left(2\,\pi\,(x - \frac{2}{\sqrt{3}}\,t)\right) - \cos\left(2\,\pi\,(x + \frac{2}{\sqrt{3}}\,t)\right)\right) \end{aligned}$$

(b)

$$f(x) = \sin(\pi\,x) = \sum_{n=1}^{\infty} C_n\,\sin(n\,\pi\,x)\,, c_1 = 1\,, c_n = 0\,, n \neq 1\,,$$

$$g(x) = \sin(2\,\pi\,x) = \sum_{n=1}^{\infty} D_n\,\lambda_n\,\sin(n\,\pi\,x)\,, D_2\,\lambda_2 = 1\,, D_n = 0\,, n \neq 2\,,$$

$$u(x,t) = \cos\left(\frac{2}{\sqrt{3}}\,\pi\,t\right)\,\sin(\pi\,x) + \frac{\sqrt{3}}{4\,\pi}\,\sin\left(\frac{4}{\sqrt{3}}\,\pi\,\,t\right)\,\sin(2\,\pi\,x)\,.$$

(c)

$$[x - c\,t\,,\; x + c\,t] = \left[1 - \frac{4}{\sqrt{3}}\,,\; 1 + \frac{4}{\sqrt{3}}\right]$$

4a)

$$\frac{\frac{d^2F}{dx^2}(x)}{F(x)} = k\,,$$

$$\frac{\frac{d^2G}{dy^2}(y)}{G(y)} = \frac{1-k}{2}\,,$$

$$\frac{d^2F}{dx^2}(x) - k\,F(x) = 0\,,$$

$$\frac{d^2G}{dy^2}(y) - \frac{1-k}{2}\,G(y) = 0\,,$$

4b)

$$u(x,y) = F(x)\,G(y)$$

$$u(0,y) = F(0)\,G(y)\,, u(a,y) = F(a)\,G(y)\,,$$

$$F(0) = F(a) = 0$$

$$k = -p^2\,, p > 0\,,$$

4c)

$$F(x) = A\,\cos(p\,x) + B\,\sin(p\,x)$$

$$F(0) = 0 \implies A = 0\,, F(a) = 0 \implies p = p_n = \frac{n\,\pi}{a}\,, n \in \mathbb{N}\,.$$

$$\frac{1-k}{2} = \frac{1+p^2}{2}$$

$$\frac{d^2G}{dy^2}(y) - \frac{1+p^2}{2}\,G(y) = 0\,,$$

$$G(y) = C_n\,e^{\sqrt{\frac{1+p^2}{2}}\,y} + D_n\,e^{-\sqrt{\frac{1+p^2}{2}}\,y}$$

$$u(x,y) = \sin(p_n\,x)\,\left(C_n\,e^{\sqrt{\frac{1+p^2}{2}}\,y} + D_n\,e^{-\sqrt{\frac{1+p^2}{2}}\,y}\right)\,.$$