KLAUSUR

Differentialgleichungen

19.9.2013

(W. Strampp)

Name:	Vorname:	Matr.–Nr.:	Studiengang:

Unterschrift:

Für jede Aufgabe gibt es 8 Punkte. Zum Bestehen der Klausur sind 15 Punkte erforderlich.

1)	2)	3)	4)

Punkte:	Note:

Fangen Sie für jede Aufgabe ein neues Blatt an.
Beschreiben Sie nur die Vorderseite der Blätter.
Geben Sie alle Rechenschritte an!

1. (a) Diskutieren Sie die Stabilität der Nulllösung bei folgenden Systemen:

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ -1 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} , \quad \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & -3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} .$$

   (b) Diskutieren Sie die Stabilität der Nulllösung bei der Gleichung:

$$y''' + 3\,y'' + 4\,y' + 2\,y = 0\,.$$

2. (a) Diskutieren Sie die Stabilität der Nulllösung bei dem System:

$$\begin{pmatrix} y_1' \\ y_2' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} y_1^3 \\ y_2^2\, y_1 \end{pmatrix} .$$

   (b) Zeigen Sie die asymptotische Stabilität der Nulllösung bei dem System:

$$y_1' = -y_1^5 + 3\,y_2\,, \quad y_2' = -2\,y_1 - y_2^3\,.$$

   Versuchen Sie, eine Ljapunow-Funktion der Gestalt $V(y_1, y_2) = \alpha\, y_1^2 + \beta\, y_2^2$ zu finden.

   Bitte wenden!

3. Gegeben ist die Wellengleichung:

$$3\,\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 4\,\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\,, \quad x \in \mathbb{R}\,, 0 \le t\,.$$

(a) Lösen Sie das Anfangsrandwertproblem

$$u(x,0) = \sin(\pi\,x)\,, \frac{\partial u}{\partial t} u(x,0) = \sin(2\,\pi\,x)\,,$$
$$u(0,t) = u(1,t) = 0\,.$$

mit der Fourier-Methode.

(b) Lösen Sie das Anfangswertproblem

$$u(x,0) = \sin(\pi\,x)\,, \frac{\partial u}{\partial t} u(x,0) = \sin(2\,\pi\,x)\,,$$

mit der Methode von d'Alembert, und geben Sie das Abhängigkeitsgebiet des Punktes $(x,t) = (1,2)$ an.

4. Gegeben ist die Wärmeleitungsgleichung:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\,, \quad x \in \mathbb{R}\,, 0 \le t\,.$$

(a) Lösen Sie das Anfangsrandwertproblem:

$$u(0,t) = u(\pi,t) = 0\,, \quad u(x,0) = 2\,\sin(x) + 3\sin(2\,x)\,.$$

(b) Das Anfangswertproblem

$$u(x,0) = f(x) = \begin{cases} 1 & , \quad 0 \le x \le 2\,\pi\,, \\ 0 & , \quad \text{sonst}\,. \end{cases}$$

besitzt eine Lösung der Gestalt:

$$u(x,t) = 2\int\limits_0^\infty (A(\omega)\,\cos(\omega\,x) + B(\omega)\,\sin(\omega\,x))\,e^{-\omega^2\,t}\,d\omega\,.$$

Geben Sie die Koeffizienten A und B an.

Lösungen

1a)

$$\det\begin{pmatrix} -2-\lambda & 1 \\ -1 & -3-\lambda \end{pmatrix} = \lambda^2 + 5\,\lambda + 7 = 0$$

$$\lambda_1 = -\frac{5}{2} + \frac{\sqrt{5}}{2}\,i\,, \quad \lambda_2 = -\frac{5}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}\,i\,,$$

Realteil < 0, Nulllösung asymptotisch stabil. **1.5P+1.5P+1P**

$$\det\begin{pmatrix} -2-\lambda & -3 \\ 1 & 2\lambda \end{pmatrix} = \lambda^2 - 1 = 0$$

$$\lambda_1 = -1\,, \quad \lambda_2 = 1\,,$$

Realteil $\lambda_2 > 0$, Nulllösung instabil.

1b)

$$\lambda^3 + 3\,\lambda^2 + 4\,\lambda + 2 = 0$$

$$\lambda_1 = -1\,, \lambda_2 = -1 + i\,, \lambda_3 = -1 + i\,,$$

Alle Realteile < 0. Asymptotische Stabilität. **1.5P+1.5P+1P**

2a) Die Jacobi-Matrix der rechten Seite im Nullpunkt lautet:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

mit den Eigenwerten: $\lambda_1 = -1$, $\lambda_2 = 1$. Es folgt: Instabilität. **1.5P+1.5P+1P**

2b)

$$\begin{aligned} & \frac{\partial V}{\partial y_1}(y_1, y_2)\,(-y_1^5 + 3\,y_2) + \frac{\partial V}{\partial y_2}(y_1, y_2)\,(-2\,y_1 - y_2^3) \\ = \; & 2\,\alpha\,y_1\,(-y_1^5 + 3\,y_2) + 2\,\beta\,y_2\,(-2\,y_1 - y_2^3) \\ = \; & 2\,(-\alpha\,y_1^6 + 3\,\alpha\,y_1\,y_2 - 2\,\beta\,y_1\,y_2 - \beta\,y_2^4)\,. \end{aligned}$$

Wähle $\alpha > 0$, $\beta > 0$, $\beta = \frac{3}{2}\,\alpha$, dann wird V zur Ljapunow-Funktion. Die Nulllösung ist asymptotisch stabil. **1.5P+1.5P+1P**

3)

$$c^2 = \frac{4}{3}\,, c = \frac{2}{\sqrt{3}}\,, l = 1\,, \lambda_n = \frac{2}{\sqrt{3}}\,n\,\pi\,.$$

(a)

$$f(x) = \sin(\pi\,x) = \sum_{n=1}^{\infty} C_n\,\sin(n\,\pi\,x)\,, c_1 = 1\,, c_n = 0\,, n \neq 1\,, \quad \textbf{1.5P}$$

$$g(x) = \sin(2\,\pi\,x) = \sum_{n=1}^{\infty} D_n\,\lambda_n\,\sin(n\,\pi\,x)\,, D_2\,\lambda_2 = 1\,, D_n = 0\,, n \neq 2\,, \quad \textbf{1.5P}$$

$$u(x,t) = \cos\left(\frac{2}{\sqrt{3}}\,\pi\,t\right)\,\sin(\pi\,x) + \frac{\sqrt{3}}{4\,\pi}\,\sin\left(\frac{4}{\sqrt{3}}\,\pi\;t\right)\,\sin(2\,\pi\,x)\,. \quad \textbf{1P}$$

(b)

$$u(x,t) = \frac{1}{2}\,\left(\sin\left(\pi\,(x + \frac{2}{\sqrt{3}}\,t)\right) + \sin\left(\pi\,(x - \frac{2}{\sqrt{3}}\,t)\right)\right) + \frac{\sqrt{3}}{4}\int_{x-\frac{2}{\sqrt{3}}\,t}^{x+\frac{2}{\sqrt{3}}\,t} \sin(2\,\pi\,\xi)\,d\xi\,, \quad \textbf{1.5P}$$

$$\begin{aligned} u(x,t) \;&=\; \frac{1}{2}\,\left(\sin\left(\pi\,(x + \frac{2}{\sqrt{3}}\,t)\right) + \sin\left(\pi\,(x - \frac{2}{\sqrt{3}}\,t)\right)\right) \\ &\quad + \frac{\sqrt{3}}{8\,\pi}\,\left(\cos\left(2\,\pi\,(x - \frac{2}{\sqrt{3}}\,t)\right) - \cos\left(2\,\pi\,(x + \frac{2}{\sqrt{3}}\,t)\right)\right)\,, \quad \textbf{1.5P} \end{aligned}$$

$$[x - c\,t\,,\; x + c\,t] = \left[1 - \frac{4}{\sqrt{3}}\,,\,1 + \frac{4}{\sqrt{3}}\right] \quad \textbf{1P}$$

4a) Die Lösung des Anfangsrandwertproblems (Stab endlicher Länge) lautet:

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} C_n \, \sin(n\,x)\, e^{-n^2\,t}\,, \quad C_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} \sin(x)\, \sin(n\,x)\, dx\,. \quad \textbf{1P}$$

$C_1 = 2\,, C_2 = 3$. Alle anderen Fourierkoeffizienten ergeben null.

$$u(x,t) = 2\, \sin(x)\, e^{-t} + 3\, \sin(2\,x)\, e^{-4\,t}\,. \quad \textbf{3P}$$

4b) Die Lösung des Anfangswertproblems (Stab unendlicher Länge) lautet:

$$u(x,t) = \int_{-\infty}^{\infty} \left(A(\omega)\, \cos(\omega\,x) + B(\omega)\, \sin(\omega\,x)\right) e^{-\omega^2\,t}\, d\omega\,.$$

Dabei nehmen die Koeffizienten folgende Gestalt an:

$$\begin{aligned}
A(\omega) &= \frac{1}{2\,\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(\xi)\, \cos(\omega\,\xi)\, d\xi = \frac{1}{2\,\pi} \int_0^{2\,\pi} \sin(\xi)\, \cos(\omega\,\xi)\, d\xi \\
&= \frac{1}{2\,\pi\,\omega}\, \sin(2\,\pi\,\omega)\,, \\
B(\omega) &= \frac{1}{2\,\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(\xi)\, \sin(\omega\,\xi)\, d\xi = \frac{1}{2\,\pi} \int_0^{2\,\pi} \sin(\xi)\, \sin(\omega\,\xi)\, d\xi \\
&= \frac{1}{2\,\pi\,\omega}\, (1 - \cos(2\,\pi\,\omega)\,. \quad \textbf{4P}
\end{aligned}$$