KLAUSUR

Differentialgleichungen

15.09.2014

(W. Strampp)

Name:	Vorname:	Matr.–Nr.:	Studiengang:

Für jede Aufgabe gibt es 8 Punkte. Zum Bestehen der Klausur sollten 16 Punkte erreicht werden.

1)	2)	3)	4)

Punkte:	Note:

Fangen Sie für jede Aufgabe ein neues Blatt an.
Beschreiben Sie nur die Vorderseite der Blätter.
Geben Sie alle Rechenschritte an!

1. (a) Diskutieren Sie die Stabilität der Nulllösung bei folgenden Systemen:

$$\begin{pmatrix} y_1' \\ y_2' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ -1 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} y_1' \\ y_2' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & -3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}.$$

   (b) Diskutieren Sie die Stabilität der Nulllösung bei der Gleichung:

$$y''' + 3\,y'' + 4\,y' + 2\,y = 0\,.$$

2. (a) Diskutieren Sie die Stabilität der Nulllösung bei dem System:

$$y_1' = -y_2 - y_2^3\,, \quad y_2' = y_1\,.$$

   Betrachten Sie die Differentialgleichung $\dfrac{dy_2}{dy_1} = -\dfrac{y_1}{y_2 + y_2^3}$ und entnehmen Sie der Lösung eine Ljapunow-Funktion.
   (b) Diskutieren Sie die Stabilität der Nulllösung bei dem System:

$$y_1' = -y_1^3 - y_2\,, \quad y_2' = y_1 - y_2^3$$

   mit der Methode der Linearisierung und mithilfe der Ljapunow-Funktion $V(y_1, y_2) = y_1^2 + y_2^2$.

3. (a) Lösen Sie das folgende Anfangsrandwertproblem für die Wellengleichung:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\,,$$

$$u(0,t) = u(1,t) = 0\,, \quad u(x,0) = \sin(3\,\pi\,x)\,, \quad \frac{\partial u}{\partial t}(x,0) = \sin(5\,\pi\,x)\,,$$

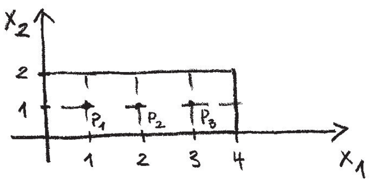
   für $0 \le x \le 1$, $0 \le t$. Lösen Sie das Problem mit der Fourier-Methode.
   (b) Lösen Sie das folgende Anfangswertproblem für die Wärmeleitungsgleichung

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\,, \quad u(x,0) = \begin{cases} e^{-x} & , \quad x \ge 0\,, \\ 0 & , \quad x < 0\,, \end{cases} \quad , \qquad x \in \mathbb{R}\,, 0 \le t\,.$$

4. Betrachten Sie das Randwertproblem für die Potentialgleichung:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2}(x) + \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2}(x) = 0\,, \quad x \in D\,, \quad u(x) = f(x)\,, \quad x \in \partial(D)\,.$$

(a) Sei $D = \{x = (x_1, x_2)\,,\, 0 \le x_1 \le 4,\, 0 \le x_2 \le 2\}$.



Auf dem Rand gelte: $f(2,0) = 1$, $f(2,2) = 1$, $f(3,0) = -1$, $f(3,2) = -1$ und $f = 0$ sonst. Berechnen Sie die Lösung in den Punkten: $P_1 = (1,1)$, $P_2 = (2,1)$, $P_3 = (3,1)$, mit dem Differenzenverfahren:

$$u(x_1,x_2) = \frac{1}{4}\,\left(u\,(x_1+1,x_2) + u\,(x_1-1,x_2) + u\,(x_1,x_2+1) + u\,(x_1,x_2-1)\right)\,.$$

(b) Sei $D = \{x = (x_1,x_2) = (r\cos(\phi), r\sin(\phi)), r \ge 2, 0 \le \phi \le 2\pi\}$.
Auf dem Rand gelte: $f(2\cos(\phi), 2\sin(\phi)) = 1 + 3\,\cos(5\,\phi) + \sin(3\,\phi)$.
Wie lautet die Lösung in Polarkoordinaten?
(Ansatz: $u(r,\phi) = A_0 + \sum_{n=1}^{\infty} r^{-n}\,(A_n\,\cos(n\,\phi) + B_n\,\sin(n\,\phi))$.)

Lösungen

1a)

$$\det\begin{pmatrix} -2-\lambda & 1 \\ -1 & -3-\lambda \end{pmatrix} = \lambda^2 + 5\,\lambda + 7 = 0$$

$$\lambda_1 = -\frac{5}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}\,i\,, \quad \lambda_2 = -\frac{5}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}\,i\,,$$

Realteil < 0, Nulllösung asymptotisch stabil.

$$\det\begin{pmatrix} -2-\lambda & -3 \\ 1 & 2\lambda \end{pmatrix} = \lambda^2 - 1 = 0$$

$$\lambda_1 = -1\,, \quad \lambda_2 = 1\,,$$

Realteil $\lambda_2 > 0$, Nulllösung instabil.

1b)

$$\lambda^3 + 3\,\lambda^2 + 4\,\lambda + 2 = 0\,.$$

$$\lambda_1 = -1\,, \quad \lambda^3 + 3\,\lambda^2 + 4\,\lambda + 2 = (\lambda+1)\,(\lambda^2 + 2\,\lambda + 2)\,.$$

$$\lambda_1 = -1\,, \lambda_2 = -1 + i\,, \lambda_3 = -1 + i\,,$$

Alle Realteile < 0. Asymptotische Stabilität.

2a)

$$\frac{dy_2}{dy_1} = \frac{-y_1}{y_2 + y_2^3}\,, \quad \int (y_2 + y_2^3)\,dy_2 = \int (-y_1)\,dy_1\,,$$

$$\frac{y_2^2}{2} + \frac{y_2^4}{4} = -\frac{y_1^2}{2} + c$$

$$y_1^2 + y_2^2 + \frac{y_2^4}{2} = 2\,c\,, c > 0\,.$$

Ljapunow-Funktion:

$$V(y_1, y_2) = y_1^2 + y_2^2 + \frac{y_2^4}{2}\,.$$

$$V(y_1, y_2) > 0$$

für $(y_1, y_2) \neq (0, 0)$.

$$\frac{\partial V}{\partial y_1}(y_1, y_2)\,(-y_2 - y_2^3) + \frac{\partial V}{\partial y_2}(y_1, y_2)\,y_1 = 2\,y_1\,(-y_2 - y_2^3) + (3\,y_2 + 2\,y_2^3)\,y_1 = 0$$

für $(y_1, y_2) \neq (0, 0)$. Stabilität.

2b) Linearisierung:

$$y_1' = -y_2\,, y_2' = y_1\,,$$

$$\det \begin{pmatrix} -\lambda & -1 \\ 1 & -\lambda \end{pmatrix} = \lambda^2 + 1 = 0\,, \lambda = \pm i\,.$$

Keine Aussage möglich.

$$V(y_1, y_2) > 0$$

für $(y_1, y_2) \neq (0, 0)$.

$$\frac{\partial V}{\partial y_1}(y_1, y_2)\,(-y_1^3 - y_2) + \frac{\partial V}{\partial y_2}(y_1, y_2)\,(y_1 - y_2^3) = -2\,y_1^4 - 2\,y_2^4 < 0$$

für $(y_1, y_2) \neq (0, 0)$. Asymptotische Stabilität.

3a) Fourier:

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} (C_n \cos(n\,\pi\,t) + D_n \sin(n\,\pi\,t)) \sin(n\,\pi\,x)\,.$$

$$f(x) = \sin(3\,\pi\,x) = \sum_{n=1}^{\infty} C_n \sin(n\,\pi\,x)\,.$$

$$g(x) = \sin(5\,\pi\,x) = \sum_{n=1}^{\infty} D_n\,n\,\pi \sin(n\,\pi\,x)\,.$$

$$u(x,t) = \cos(3\,\pi\,t) \sin(3\,\pi\,x) + \frac{1}{5\,\pi} \sin(5\,\pi\,t) \sin(5\,\pi\,x)$$

3b)

$$u(x,t) = 2\int_0^{\infty} (A(\omega) \cos(\omega\,x) + B(\omega) \sin(\omega\,x))\,e^{-\omega^2\,t}\,d\omega\,,$$

$$\begin{aligned}
A(\omega) &= \frac{1}{2\,\pi}\int_{-\infty}^{\infty} u(\xi,0) \cos(\omega\,\xi)\,d\xi = \frac{1}{2\,\pi}\int_0^{\infty} e^{-\xi} \cos(\omega\,\xi)\,d\xi = \frac{1}{2\,\pi}\,\frac{1}{1+\omega^2} \\
B(\omega) &= \frac{1}{2\,\pi}\int_{-\infty}^{\infty} u(\xi,0) \sin(\omega\,\xi)\,d\xi = \frac{1}{2\,\pi}\int_0^{\infty} e^{-\xi} \sin(\omega\,\xi)\,d\xi = \frac{1}{2\,\pi}\,\frac{\omega}{1+\omega^2}
\end{aligned}$$

.

4a)

$$u(P_1) = \frac{1}{4}\,u(P_2)\,,$$

$$u(P_2) = \frac{1}{4}\,u(P_1) + \frac{1}{4}\,u(P_3) + \frac{1}{2}\,,$$

$$u(P_3) = \frac{1}{4}\,u(P_2) - \frac{1}{2}\,,$$

$$\begin{pmatrix} 4 & -1 & 0 \\ -1 & 4 & -1 \\ 0 & -1 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u(P_1) \\ u(P_2) \\ u(P_3) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix}.$$

Lösung: $u(P_1) = \dfrac{3}{28}\,, u(P_2) = \dfrac{3}{7}\,, u(P_3) = -\dfrac{11}{28}\,.$

4b)

$$u(r,\phi) = A_0 + \sum_{n=1}^{\infty} r^{-n}\,(A_n\,\cos(n\,\phi) + B_n\,\sin(n\,\phi))\,.$$

$$u(2,\phi) = A_0 + \sum_{n=1}^{\infty} 2^{-n}\,(A_n\,\cos(n\,\phi) + B_n\,\sin(n\,\phi)) = 1 + 3\,\cos(5\,\phi) + \sin(3\,\phi)$$

$$A_0 = 1\,, A_5 = 3\cdot 2^5\,, A_n = 0, n \neq 0, 5\,, B_3 = 2^3\,, B_n = 0, n \neq 3\,.$$

$$u(r,\phi) = 1 + \frac{3\cdot 2^5}{r^5}\,\cos(5\,\phi) + \frac{2^3}{r^3}\,\sin(3\,\phi)\,.$$

Oder Koeffizienten berechnen:

$$A_0 = \frac{1}{2\,\pi}\int_0^{2\,\pi} f(\varphi)\,d\varphi\,, A_n = \frac{2^n}{\pi}\int_0^{2\,\pi} f(\varphi)\,\cos(n\,\varphi)\,d\varphi\,, B_n = \frac{2^n}{\pi}\int_0^{2\,\pi} f(\varphi)\,\sin(n\,\varphi)\,d\varphi\,.$$

(Umständlich).