Universität Kassel
Fachbereich 10/16
Dr. habil. Sebastian Petersen 02.09.2016

Klausur: Differentialgleichungen

Version mit Lösungsskizze

Name:	Vorname:	Matrikelnummer:	Versuch:

Unterschrift:

Bitte fangen Sie für jede Aufgabe ein neues Blatt an. Beschreiben Sie nur die Vorderseite der Blätter.

Es können maximal **36** Punkte erreicht werden.

Aufgabe 1	Aufgabe 2	Aufgabe 3	Aufgabe 4

Punkte:	**Note:**

Aufgabe 1. (3+3+4=10 Punkte)

a) Lösen Sie das Anfangswertproblem $y' = x^{-1}y + x^3$, $y(1) = 5$ auf $G =]0, \infty[\, \times \mathbb{R}$.

b) Lösen Sie das Anfangswertproblem $y' = y^{-1}e^x$, $y(0) = 3$ auf $G = \mathbb{R} \times\,]0, \infty[$.

c) Wir betrachten die autonome skalare Differentialgleichung

$$y' = y^4 - y^2 \quad (\mathscr{D})$$

auf dem Gebiet $G = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$. Bestimmen Sie die Ruhelagen von $(\mathscr{D})$, skizzieren Sie die Phasenlinie von $(\mathscr{D})$ und geben Sie für jede dieser Ruhelage an, ob diese instabil oder stabil ist. Bestimmen Sie ferner $\lim\limits_{x \to \infty} \varphi(x)$ für die maximale Lösung φ von $(\mathscr{D})$, die $\varphi(0) = \frac{1}{2}$ erfüllt.

Aufgabe 2. (3+4+3=10 Punkte)

a) (i) Geben Sie ein Fundamentalsystem für die lineare Differentialgleichung

$$y' = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} y \quad (\mathscr{A})$$

an.

(ii) Skizzieren Sie das Phasenportrait von dem autonomen System $(\mathscr{A})$.

(iii) Offenbar ist $\vec{0}$ eine Ruhelage von $(\mathscr{A})$.
Ist diese Ruhelage asymptotisch stabil / stabil / instabil?

b) (i) Finden Sie ein Fundamentalsystem für die skalare lineare Differentialgleichung

$$y'' - 6y' + 9y = 0 \quad (\mathscr{L}).$$

(ii) Lösen Sie das Randwertproblem

$$y'' - 6y' + 9y = 0,\ y(0) = 0,\ y(1) = 7 \quad (\mathscr{R}).$$

c) Wir betrachten das autonome System

$$\begin{pmatrix} y_1' \\ y_2' \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} y_1 - 2y_2 + \sin(y_1 y_2) \\ y_1 + 4y_2 + y_1^2 \end{pmatrix}}_{f(\vec{y})} \quad (\mathscr{S}).$$

Offenbar ist $\vec{0}$ eine Ruhelage von $(\mathscr{S})$. Berechnen Sie die Eigenwerte der Jacobi-Matrix $Df(\vec{0})$ und entscheiden Sie mit Hilfe der Methode der Linearisierung, ob die Ruhelage $\vec{0}$ stabil oder instabil ist.

Bitte wenden

Aufgabe 3. (2+2+2=6 Punkte)

a) Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine stetige Abbildung und $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$. Wir betrachten das autonome skalare AWP

$$y' = f(y), \; y(x_0) = y_0 \quad (\mathscr{A})$$

auf $G = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$. Sei außerdem ξ eine Nullstelle von f. Kreuzen Sie genau die zutreffenden Aussagen an.

- ☐ Weil f stetig ist hat das AWP $(\mathscr{A})$ genau eine maximale Lösung.
- ☐ Wenn f stetig differenzierbar ist, dann hat das AWP $(\mathscr{A})$ genau eine maximale Lösung.
- ☐ Wenn f stetig differenzierbar ist, dann hat das AWP $(\mathscr{A})$ eine auf ganz $\mathbb{R}$ definierte Lösung $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Ein "Blowup" kann unter den gegebenen Voraussetzungen nicht vorliegen.
- ☐ Wenn f stetig differenzierbar mit $f'(\xi) \leq 0$ ist, dann impliziert der Linearisierungssatz, dass die Ruhelage ξ stabil ist.

b) Wir betrachten die lineare Differentialgleichung $y' = Ay$ $(\mathscr{L})$ wobei $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$.
Wir geben bekannt, dass $P_A(T) = (T - (1+i))(T - (1-i))$ das charakteristische Polynom von A ist. Die Eigenwerte von A sind also $(1+i)$ und $(1-i)$. Kreuzen Sie genau die zutreffenden Aussagen an.

- ☐ Das Phasenportrait von $(\mathscr{L})$ ist von Typ "Spiralstrudel".
- ☐ Die Trajektorien von $(\mathscr{L})$ sind Kreise mit Mittelpunkt $\vec{0}$.
- ☐ Die Trajektorien von $(\mathscr{L})$ sind Geraden.
- ☐ $\vec{0}$ ist eine asymptotisch stabile Ruhelage von $(\mathscr{L})$.

c) Wir betrachten die lineare Differentialgleichung

$$y''' + \sin(x)y'' + xy' + x^2 y = 0 \quad (\mathscr{E})$$

Seien $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ drei Lösungen von $(\mathscr{E})$. Für $x \in \mathbb{R}$ sei $W(x) := \det((\varphi_i^{(j)}(x))_{1 \leq j, i \leq 3}$ die entsprechende Wronski-Determinante. Kreuzen Sie genau die zutreffenden Aussagen an.

- ☐ Wenn $W(7) \neq 0$, dann ist $(\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3)$ ein Fundamentalsystem von $(\mathscr{E})$.
- ☐ Wenn $W(7) \neq 0$, dann gilt $W(x) \neq 0$ für alle $x \in \mathbb{R}$.
- ☐ $\psi := 3\varphi_1 + 2\varphi_2$ ist eine Lösung von $(\mathscr{E})$.
- ☐ Der Lösungsraum von $(\mathscr{E})$ hat Dimension 4.

Bitte wenden

Aufgabe 4. (4+3+3=10 Punkte)

a) Sei $u : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ die Lösung der PDE

$$\left.\begin{array}{l} 2\partial_x u(x,y) - 3\partial_y u(x,y) = 0 \\ u(t,5t) = \exp(t)\ \forall t \in \mathbb{R} \end{array}\right\} (\mathscr{L}).$$

(i) Die Höhenlinien von u sind zueinander parallele Geraden. Finden Sie den Richtungsvektor und den Normalenvektor dieser Geraden.

(ii) Berechnen Sie nun die Funktion u.

b) Wir betrachten das folgende Anfangswertproblem für die Wellengleichung:

$$\left.\begin{array}{l} \partial_t\partial_t u(x,t) = 9\ \partial_x\partial_x u(x,t) \\ u(x,0) = \sin(x)\ \forall x \in \mathbb{R} \\ \partial_t u(x,0) = x\ \forall x \in \mathbb{R} \end{array}\right\} (\mathscr{P}_1)$$

Man berechne die Lösung $u : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ von $(\mathscr{P}_1)$ mit der Methode von d'Alembert.

c) Wir betrachten das folgende Anfangsrandwertproblem für die Wärmeleitungsgleichung in einem Stab endlicher Länge $\ell = 1$:

$$\left.\begin{array}{l} \partial_t u(x,t) = \partial_x\partial_x u(x,t) \\ u(0,t) = u(1,t) = 0\ \forall t \in \mathbb{R} \\ u(x,0) = -3\sin(\pi x) + 7\sin(2\pi x)\ \forall x \in [0,1] \end{array}\right\} (\mathscr{P}_2)$$

Man berechne die Lösung $u : [0,1] \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ von $(\mathscr{P}_2)$ mit der Fourier-Methode.

Lösungsskizze

Aufgabe 1.

a) Wir lösen das Anfangswertproblem $y' = \underbrace{x^{-1}}_{=:a(x)} y + \underbrace{x^3}_{b(x)}$, $y(1) = 5$ $(\mathscr{A}_1)$ auf $G = \underbrace{]0,\infty[}_{=:I} \times \mathbb{R}$. Dies ist eine skalare, lineare Differentialgleichung. Es ist

$$\varphi : I \to \mathbb{R}, \varphi(x) = \exp(\int_1^x a(s)ds) = \exp(\int_1^x s^{-1}ds) = \exp(\log(x)) = x$$

eine Lösung von dem homogenen Anteil $y' = x^{-1}y$, und zwar diejenige, die $\varphi(1) = 1$ erfüllt. Nach dem Ansatz "Variation der Konstanten" bekommen wir die Lösung $\psi : I \to \mathbb{R}$ von $(\mathscr{A}_1)$ wie folgt:

$$\begin{aligned} \psi(x) &= \varphi(x)(5 + \textstyle\int_1^x \varphi(s)^{-1}b(s)ds) = \\ &= x(5 + \textstyle\int_1^x s^2 ds) = x(5 + [\frac{s^3}{3}]_{s=1}^x \\ &= x(5 + \frac{x^3}{3} - \frac{1}{3}) = \frac{14}{3}x + \frac{1}{3}x^4 \end{aligned}$$

b) Wir lösen das Anfangswertproblem $y' = y^{-1}e^x$, $y(0) = 3$ $(\mathscr{A}_2)$ auf $G = \mathbb{R}\times\,]0,\infty[$. Dies ist eine DGL mit getrennten Variablen. Wir machen den üblichen Ansatz.

$$\begin{aligned} \textstyle\int_3^y sds = \int_0^x e^t dt \quad &\Rightarrow \quad \frac{y^2}{2} - \frac{9}{2} = e^x - 1 \Rightarrow \\ &\Rightarrow \quad y^2 = 2e^x + 7 \\ &\Rightarrow \quad y = \pm\sqrt{2e^x + 7} \end{aligned}$$

Unter Beachtung von $G = \mathbb{R}\times\,]0,\infty[$, $y > 0$ setzen wir $\psi(x) := +\sqrt{2e^x + 7}$, und dies definiert offenbar eine auf ganz $\mathbb{R}$ definierte Funktion $\psi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, die das AWP $(\mathscr{A}_2)$ löst.

c) Wir betrachten die autonome skalare Differentialgleichung

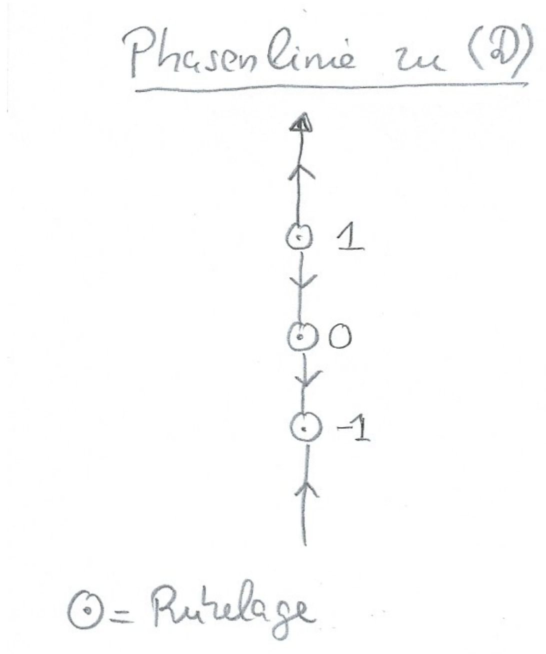
$$y' = \underbrace{y^4 - y^2}_{=:f(y)} \quad (\mathscr{D})$$

auf dem Gebiet $G = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$.

Offenbar gilt $f(y) = (y+1)\cdot y^2 \cdot (y-1)$. Die Ruhelagen von $(\mathscr{D})$ (d.h. die Nullstellen von f) sind -1, 0 und 1. Ferner sieht man, dass

$$\begin{aligned} f(y) &> 0 \quad && \text{für } y < -1, \\ f(y) &< 0 && \text{für } -1 < y < 0, \\ f(y) &< 0 && \text{für } 0 < y < 1 \text{ und} \\ f(y) &> 0 && \text{für } y > 1 \end{aligned}$$

gilt. Die Phasenlinie von $(\mathscr{D})$ sieht als wie folgt aus:



Man sieht daran auch: -1 ist (asymptotisch) stabil, 0 ist instabil und 1 ist instabil. Ferner gilt $\lim\limits_{x \in \infty} \varphi(x) = 0$.

Aufgabe 2.

a) (i) Wir betrachten die lineare Differentialgleichung

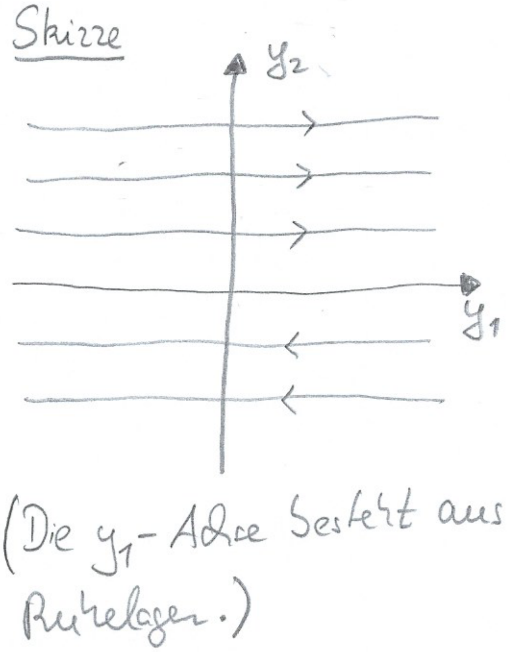
$$y' = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} y \quad (\mathscr{A})$$

an. Die involvierte Matrix ist eine Jordan-Matrix. Mit einem wohlbekannten Satz sieht man sofort:

$$\phi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^{2\times 2},\ \phi(x) = \begin{pmatrix} 1 & x \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

ist ein Fundamentalsystem zu $(\mathscr{A})$.

(ii) Wir skizzieren das Phasenportrait:



(iii) Anhand des Phasenportraits (oder anhand der Sätze der Vorlesung) sieht man sofort: Die Ruhelage $\vec{0}$ von $(\mathscr{A})$ ist instabil.

b) (i) Wir betrachten die skalare lineare Differentialgleichung

$$y'' - 6y' + 9y = 0 \quad (\mathscr{L}).$$

Das charakteristische Polynom ist $P(T) = T^2 - 6T + 9$. Mit der pq-Formel sieht man, dass 3 doppelte Nullstelle von $P(T)$ ist; $P(T) = (T-3)^2$. (Alternativ kann man das natürlich auch mit der binomischen Formel sehen.) Ein Fundamentalsystem von $(\mathscr{L})$ ist daher durch $\phi(x) = (e^{3x}, xe^{3x})$ gegeben.

(ii) Wir wollen nun das Randwertproblem

$$y'' - 6y' + 9y = 0, \; y(0) = 0, \; y(1) = 7 \quad (\mathscr{R})$$

lösen. Die allgemeine Lösung von $(\mathscr{L})$ ist

$$\varphi_{\vec{c}} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \varphi_{\vec{c}}(x) = c_1 e^{3x} + c_2 x e^{3x}, \quad (\vec{c} = (c_1, c_2) \in \mathbb{R}^2),$$

vgl. (ii). Wir versuchen $\vec{c}$ derart zu wählen, dass $\varphi_{\vec{c}}$ Lösung von $(\mathscr{R})$ ist. Das führt auf $0 = \varphi_{\vec{c}}(0) = c_1$ und auf $7 = \varphi_{\vec{c}}(1) = c_1 + c_2 e^3$, d.h. auf $c_1 = 0$ und $c_2 = 7e^{-3}$. Somit ist $\varphi(x) := 7e^{-3} x e^{3x} = 7xe^{3x-3}$ Lösung von $(\mathscr{R})$; weitere Lösungen hat $(\mathscr{R})$ nicht.

c) Wir betrachten das autonome System

$$\begin{pmatrix} y_1' \\ y_2' \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} y_1 - 2y_2 + \sin(y_1 y_2) \\ y_1 + 4y_2 + y_1^2 \end{pmatrix}}_{f(\vec{y})} \quad (\mathscr{S}).$$

Man errechnet leicht, dass

$$Df(y_1, y_2) = \begin{pmatrix} 1 + y_2 \cos(y_1 y_2) & -2 + y_1 \cos(y_1 y_2) \\ 1 + 2y_1 & 4 \end{pmatrix},$$

und daher

$$J := Df(0,0) = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$$

gilt. Das charakteristische Polynom von J ist $P_J(T) = T^2 - 5T + 6$. Mit der pq-Formel sieht man, dass die Nullstellen von $P_J(T)$ durch 2 und 3 gegeben sind; $P_J(T) = (T-2)(T-3)$. Die Eigenwerte von J sind also 2 und 3. Da beide Eigenwerte von J reell und positiv sind, ist $\vec{0}$ eine instabile Ruhelage von $(\mathscr{S})$.

Aufgabe 3.

a) falsch, wahr, falsch, falsch

b) wahr, falsch, falsch, falsch

c) wahr, wahr, wahr, falsch

Aufgabe 4.

a) Sei $u : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ die Lösung der PDE

$$\left.\begin{array}{l} 2\partial_x u(x,y) - 3\partial_y u(x,y) = 0 \\ u(t,5t) = \exp(t)\ \forall t \in \mathbb{R} \end{array}\right\} (\mathscr{L}).$$

(i) u erfüllt also $\nabla u(x,y) \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \end{pmatrix} = 0$, d.h. der Gradient $\nabla u(x,y)$ steht überall auf den Vektor $\begin{pmatrix} 2 \\ -3 \end{pmatrix}$ senkrecht. Bekanntlich steht der Gradient $\nabla u(x,y)$ auf die Höhenlinie von u durch (x,y) senkrecht. Damit sieht man: Die Höhenlinien von u sind zueinander parallele Geraden mit Richtungsvektor $\begin{pmatrix} 2 \\ -3 \end{pmatrix}$. Der Normalenvektor dieser Geraden ist $\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}$. Diese Geraden haben also Geradengleichungen der Form $3x + 2y = c$.

(ii) Somit muss u von der Form $u(x,y) = v(3x+2y)$ sein mit einer hinreichend oft differenzierbaren Funktion $v : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Um v explizit zu bestimmen, ziehen wir die Anfangsbedingung heran. Es gilt

$$e^t = u(t,5t) = v(13t) \quad \text{für alle } t \in \mathbb{R}.$$

Mit der Substitution $s = 13t$ sieht man, dass $v(s) = \exp(\frac{1}{13}s)$ für alle $s \in \mathbb{R}$ gilt. Es folgt

$$u(x,y) = \exp\left(\frac{3}{13}x + \frac{2}{13}y\right)$$

für alle $x, y \in \mathbb{R}$.

b) Es geht um die Wellengleichung mit $c = 3$, Anfangsgeschwindigkeit $g(x) = x$ und Anfangsauslenkung $f(x) = \sin(x)$. Die d'Alembert-Formel liefert

$$\begin{aligned} u(x,t) &= \tfrac{1}{2}(f(x+ct) + f(x-ct)) + \tfrac{1}{2c}\int_{x-ct}^{x+ct} g(s)ds = \\ &= \tfrac{1}{2}(\sin(x+ct) + \sin(x-ct)) + \tfrac{1}{6}\int_{x-3t}^{x+3t} s ds = \\ &= \tfrac{1}{2}(\sin(x+3t) + \sin(x-3t)) + \tfrac{1}{12}((x+3t)^2 - (x-3t)^2). \end{aligned}$$

c) Hier geht es um die Wärmeleitungsgleichung in einem Stab endlicher Länge $\ell = 1$ und mit $c = 1$. Nach dem Fourier-Ansatz ist

$$\begin{aligned} u(x,t) &= \textstyle\sum_{n=1}^\infty C_n \sin\left(\frac{n\pi}{\ell}x\right) \exp\left(-\left(\frac{cn\pi}{\ell}\right)^2 t\right) \\ &= \textstyle\sum_{n=1}^\infty C_n \sin(n\pi x) \exp\left(-(n\pi)^2 t\right) \end{aligned}$$

wobei wir die C_n so wählen müssen, dass

$$u(x,0) = \sum_{n=1}^{\infty} C_n \sin(n\pi x) \stackrel{!}{=} -3\sin(\pi x) + 7\sin(2\pi x)$$

für alle x gilt. Dafür muss man $C_1 = -3$, $C_2 = 7$ und $C_n = 0 \forall n \notin \{1,2\}$ setzen. Es ergibt sich die Lösung

$$u(x,t) = -3\sin(\pi x)\exp(-\pi^2 t) + 7\sin(2\pi x)\exp(-4\pi^2 t).$$