Universität Kassel
Fakutät 10/16
PD Dr. Sebastian Petersen 15.09.2017

Klausur zur Vorlesung

Differentialgleichungen für Master Ingenieurwissenschaften

Sommersemester 2017

Version mit Lösungsskizze

Es können maximal **40** Punkte erreicht werden.

Aufgabe 1. (4+4+2=10 Punkte)

a) Lösen Sie das Anfangswertproblem

$$y' = 6x^2 y + x^{-1} \exp(2x^3), \; y(1) = 1 \qquad (\mathscr{A})$$

auf dem Gebiet $G =]0, \infty[\times \mathbb{R}$. (Hinweis: Dies ist eine lineare skalare DGL.)

b) Lösen Sie das Anfangswertproblem

$$y' = \frac{-x+1}{2y^3}, \; y(1) = 1 \qquad (\mathscr{B})$$

auf $G = \mathbb{R} \times]0, \infty[$. (*Anmerkung:* Auch der Definitionsbereich der maximalen Lösung soll bestimmt werden.)

c) Kreuzen Sie ohne Begründung in der folgenden Liste genau die wahren Aussagen an:

- ☐ Das Anfangswertproblem $[y' = \frac{\cos(xy)y^4}{x^2+y^2} + xy, \; y(1) = 1]$ auf $G =]0, \infty[\times \mathbb{R}$ hat genau eine maximale Lösung.
- ☐ Wenn $f : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine unendlich oft stetig differenzierbare Funktion ist, dann hat das Anfangswertproblem

  $$y' = f(x, y), \; y(1) = 1$$

  eine auf ganz $\mathbb{R}$ definierte Lösung $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.
- ☐ Wenn $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine unendlich oft stetig differenzierbare Funktion ist, dann hat das Anfangswertproblem

  $$y'' - g(x)y' + y = 0, \; y(0) = 0, \; y'(0) = 3$$

  genau eine auf ganz $\mathbb{R}$ definierte Lösung $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.
- ☐ Wenn $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine unendlich oft stetig differenzierbare Funktion ist, dann hat das Randwertproblem

  $$y'' - g(x)y' + y = 0, \; y(0) = 0, \; y(2\pi) = 3$$

  genau eine auf ganz $\mathbb{R}$ definierte Lösung $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.

Lösungsskizze zu Aufgabe 1.

a) Wir betrachten das Anfangswertproblem

$$y' = \underbrace{6x^2}_{=:a(x)} y + \underbrace{x^{-1}\exp(2x^3)}_{=:b(x)},\ y(1) = 1.$$

$(x_0, y_0) := (1, 1)$. Es ist eine lineare Differentialgleichung erster Ordnung. Mit der Hilfsfunktion

$$\phi(x) := \exp\left(\int_{x_0}^{x} a(t)dt\right) = \exp([2t^3]_1^x) = \exp(2x^3 - 2)$$

liefert die Variation der Konstanten die maximale Lösung

$$\begin{aligned}
\psi(x) = \phi(x)&\left(y_0 + \int_1^x \phi(t)^{-1} b(t)dt\right) = \\
&= \exp(2x^3 - 2)\left(1 + \int_1^x \exp(-2t^3 + 2)t^{-1}\exp(2t^3)dt\right) = \\
&= \exp(2x^3 - 2)\left(1 + \int_1^x t^{-1}e^2 dt\right) = \\
&= \exp(2x^3 - 2)\left(1 + e^2\ln(x)\right) = \\
&= \exp(2x^3 - 2) + \exp(2x^3)\ln(x) = \exp(2x^3)(e^{-2} + \ln(x))
\end{aligned}$$

b) Hier geht es um eine DGL mit getrennten Variablen.

$$\begin{aligned}
\frac{dy}{dx} = \frac{-x+1}{2y^3} &\Rightarrow \int 4y^3 dy = \int (-2x+2)dx \\
&\Rightarrow y^4 = -x^2 + 2x + C
\end{aligned}$$

Und wegen $y(1) = 1$ folgt $1 = -1 + 2 + C$ und damit $C = 0$. Also muss $y = \pm\sqrt[4]{-x^2 + 2x}$ und - da der Graph von y nach Aufgabenstellung in der oberen Halbebene liegen muss und $y(1) = 1$ gelten soll - sogar $y = +\sqrt[4]{-x^2 + 2x}$ gelten. Nun ist

$$-x^2 + 2x > 0 \Leftrightarrow -x(x-2) < 0 \Leftrightarrow 0 < x < 2$$

und daher ist $I =]0, 2[$ der Definitionsbereich der max. Lösung. Insgesamt ist die max. Lsg. also durch

$$y :]0, 2[\to \mathbb{R},\ y(x) = \sqrt[4]{-x^2 + 2x}$$

gegeben.

c) Ja / Nein / Ja / Nein.

Aufgabe 2. (3+3+4=10 Punkte)

a) Sei $A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & -1 \\ -1 & 5 & -1 \\ -1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$. Wir geben folgendes bekannt: Mit

$$S = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad J = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

gilt $S^{-1}AS = J$ und J ist eine Jordanmatrix.

(i) Geben Sie ein $\mathbb{R}$-Fundamentalsystem für das lineare System $y' = Jy$ an.

(ii) Bestimmen Sie nun ein $\mathbb{R}$-Fundamentalsystem für das lineare System $y' = Ay$.

b) Wir betrachten das ebene lineare System

$$y' = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} y. \qquad (\mathscr{S})$$

Berechnen Sie das charakteristische Polynom und die Eigenwerte der Systemmatrix und kreuzen Sie dann in der folgenden Liste genau die wahren Aussagen an.

☐ Das Phasenportrait von $(\mathscr{S})$ ist ein einwärts laufender Spiralstrudel.

☐ Das Phasenportrait von $(\mathscr{S})$ ist ein auswärts laufender Spiralstrudel.

☐ Das Phasenportrait von $(\mathscr{S})$ ist vom Typ “Sattelpunkt”.

☐ Die offensichtliche Ruhelage $(0,0)$ von $(\mathscr{S})$ ist stabil.

c) Wir betrachten die homogen-lineare Differentialgleichung

$$y'' - \frac{1}{2x}y' + \frac{1}{2x^2}y = 0 \quad (x > 0) \qquad (\mathscr{L})$$

(i) Zeigen Sie durch Einsetzen in die DGL $(\mathscr{L})$, dass durch $\varphi(x) := x$ und $\psi(x) = \sqrt{x}$ $(\varphi, \psi :]0, \infty[\to \mathbb{R})$ zwei Lösungen von $(\mathscr{L})$ gegeben sind.

(ii) Entscheiden Sie mit Hilfe der Wronski-Determinante, ob das 2-Tupel (φ, ψ) von Lösungen von $(\mathscr{L})$ unabhängig ist.

Lösungsskizze zu Aufgabe 2.

a) (i) Nach der wohlbekannten Formel zur Bestimmung eines Fundamentalsystems zu einer Jordan-Matrix ist durch (die Spalten von) $\phi(x) := \begin{pmatrix} e^{3x} & xe^{3x} & 0 \\ 0 & e^{3x} & 0 \\ 0 & 0 & e^{4x} \end{pmatrix}$ ein $\mathbb{R}$-Fundamentalsystem für das lineare System $y' = Jy$ gegeben.

(ii) Nun ist durch

$$\psi(x) = S\phi(x) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^{3x} & xe^{3x} & 0 \\ 0 & e^{3x} & 0 \\ 0 & 0 & e^{4x} \end{pmatrix} =$$
$$= \begin{pmatrix} e^{3x} & xe^{3x} & e^{4x} \\ e^{3x} & xe^{3x} + e^{3x} & e^{4x} \\ e^{3x} & xe^{3x} + e^{3x} & 0 \end{pmatrix}$$

ein $\mathbb{R}$-Fundamentalsystem für das lineare System $y' = Ay$ gegeben.

b) Sei A die Systemmatrix. Dann ist $P_A(T) = T^2 - 2T + 2$. Mit der *pq*-Formel sieht man nun, dass $1 \pm i$ die Eigenwerte von A sind. (Es gilt also $\mathbb{S}(A) = \{1+i, 1-i\}$.) Die Antworten auf die weiteren Fragen sind:
Nein / Ja / Nein / Nein.

c) (i) Offenbar gilt

$$\begin{array}{rclcrcl} \varphi(x) & = & x & \quad & \psi(x) & = & x^{\frac{1}{2}} \\ \varphi'(x) & = & 1 & & \psi'(x) & = & \frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}} \\ \varphi''(x) & = & 0 & & \psi''(x) & = & -\frac{1}{4}x^{-\frac{3}{2}} \end{array}$$

Also ist

$$\begin{aligned} \varphi'' - \frac{1}{2x}\varphi' + \frac{1}{2x^2}\varphi &= 0 + \frac{1}{2x} \cdot 1 + \frac{1}{2x^2} \cdot x = 0 \\ \psi'' - \frac{1}{2x}\psi' + \frac{1}{2x^2}\psi &= -\frac{1}{4}x^{-\frac{3}{2}} - \frac{1}{2x} \cdot \frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}} + \frac{1}{2x^2} \cdot x^{\frac{1}{2}} = \\ &= -\frac{1}{4}x^{-\frac{3}{2}} - \frac{1}{4}x^{-\frac{3}{2}} + \frac{1}{2} \cdot x^{-\frac{3}{2}} = 0. \end{aligned}$$

Also sind φ und ψ zwei Lösungen von $(\mathscr{L})$.

(ii) Die Wronski-Determinante zu dem 2-Tupel (φ, ψ) von Lösungen von $(\mathscr{L})$ ist

$$W(x) = \det \begin{pmatrix} \varphi & \psi \\ \varphi' & \psi' \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} x & x^{\frac{1}{2}} \\ 1 & \frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}} \end{pmatrix} = -\frac{1}{2}x^{\frac{1}{2}}$$

und $W(1) = -\frac{1}{2} \neq 0$. Also ist (φ, ψ) unabhängig.

Aufgabe 3. (5+5=10 Punkte)

a) Wir betrachten die autonome skalare Differentialgleichung

$$y' = (y-1)^2(y^2-4) \tag{$\mathscr{A}$}$$

 (i) Berechnen Sie die Ruhelagen von ($\mathscr{A}$) und skizzieren Sie die Phasenlinie von ($\mathscr{A}$).

 (ii) Entscheiden Sie für jede Ruhelage von ($\mathscr{A}$), ob sie stabil ist.

 (iii) Sei φ diejenige Lösung von ($\mathscr{A}$), die $\varphi(0) = 0$ erfüllt. Bestimmen Sie $\lim_{x\to\infty} \varphi(x)$ und $\lim_{x\to-\infty} \varphi(x)$?

b) Wir betrachten das autonome System

$$\begin{pmatrix} y_1' \\ y_2' \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} y_1^2 + y_2 \\ \sin(y_1) + \sin(y_2) \end{pmatrix}}_{=:f(y)} \tag{$\mathscr{B}$}$$

Offenbar ist $(0,0)$ eine Ruhelage von ($\mathscr{B}$). Berechnen Sie die Eigenwerte von der Jacobi-Matrix $Df(0,0)$ und entscheiden Sie dann mit kurzer Begründung, ob die Ruhelage $(0,0)$ stabil ist.

Lösungsskizze zu Aufgabe 3.

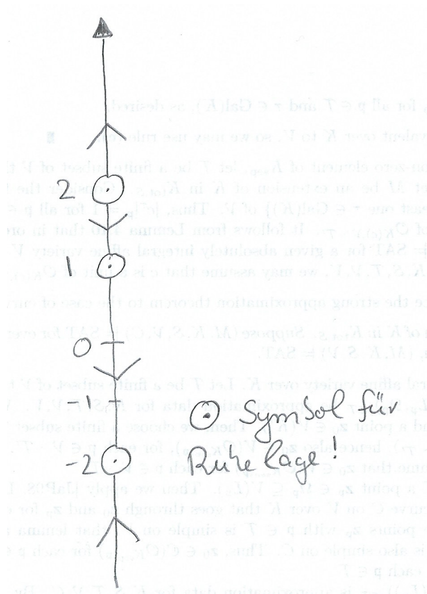
a) Wir betrachten die autonome skalare Differentialgleichung

$$y' = \underbrace{(y-1)^2(y^2-4)}_{=:f(y)} \tag{1}$$

(i) Die Ruhelagen von $(\mathscr{A})$ sind genau die Nullstellen von $f(y) = (y-2)(y-1)^2(y+2)$. Also ist $\{-2, 1, 2\}$ die Menge der Ruhelagen von $(\mathscr{A})$. Offenbar gilt

$$\begin{aligned} f(y) &> 0 \quad \text{falls } y < -2, \\ f(y) &< 0 \quad \text{falls } -2 < y < 1, \\ f(y) &< 0 \quad \text{falls } 1 < y < 2, \\ f(y) &> 0 \quad \text{falls } 2 < y. \end{aligned}$$

Die Phasenlinie von $(\mathscr{A})$ sieht also so aus:



(ii) Anhand der Phasenlinie sieht man leicht: -2 ist stabil, 1 ist instabil und 2 ist instabil.

(iii) Offenbar gilt: $\lim_{x\to\infty} \varphi(x) = -2$ und $\lim_{x\to-\infty} \varphi(x) = 1$.

b) Es gilt

$$Df(y_1, y_2) = \begin{pmatrix} 2y_1 & 1 \\ \cos(y_1) & \cos(y_2) \end{pmatrix} \text{ und } Df(0,0) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Sei $A := Df(0,0)$. Das charakteristische Polynom von A ist

$$P_A(T) = T^2 - T - 1.$$

Das Spektrum von A ist nach der pq-Formel $\mathbb{S}(A) = \{\frac{1}{2}(1 \pm \sqrt{5})\}$. Somit hat A einen Eigenwert mit positivem Realteil und der Stabilitätssatz (Linearisierungsmethode!) impliziert: Die Ruhelage $(0,0)$ ist instabil.

Aufgabe 4. (3+3+4=10 Punkte)

a) Finden Sie die Lösung $u : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R},\ (x, y) \mapsto u(x, y)$ von der linearen partiellen Differentialgleichung

$$\left.\begin{array}{l} -\partial_x u(x,y) + 3\partial_y u(x,y) = 0 \\ u(x,0) = \cos(x)\ \forall x \in \mathbb{R} \end{array}\right\} (\mathscr{L})$$

(Hinweis: Berechnen Sie zunächst die Charakeristiken, d.h. die Höhenlinien der Lösung u.)

b) Finden Sie die Lösung $u : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R},\ (x, t) \mapsto u(x, t)$ der partiellen Differentialgleichung

$$\left.\begin{array}{l} \partial_t\partial_t u(x,t) = \partial_x\partial_x u(x,t) \\ u(x,0) = 2x^3, \partial_t u(x,0) = 6x^2\ \forall x \in \mathbb{R} \end{array}\right\} (\mathscr{D})$$

(Hinweis: Sie können die Formel von d'Alembert für die 1-dimensionale Wellengleichung anwenden.)

c) Wir betrachten die Wärmeleitungsgleichung für einen Stab der Länge $\ell = \pi$:

$$\left.\begin{array}{l} \partial_t u(x,t) = 4\partial_x\partial_x u(x,t) \\ u(0,t) = u(\pi,t) = 0\ \forall t \geq 0 \\ u(x,0) = \sin(x) + \sin(2x) + 10\sin(3x)\ \forall x \in [0,\pi] \end{array}\right\} (\mathscr{P})$$

Finden Sie die Lösung $u : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, (x,t) \mapsto u(x,t)$ von $(\mathscr{P})$ mit der Fourier-Methode.

Lösungsskizze zu Aufgabe 4.

a) Die erste Bedingung läuft auf $\langle \nabla u(x,y),(1,-3)\rangle = 0$ hinaus. Die Höhenlinien von u sind also genau die Geraden mit Richtungsvektor $(-1,3)$, d.h. mit Normalenvektor $(3,1)$. Somit sind die Geraden der Form

$$3x + y = c$$

genau die Höhenlinien von u. Es muss also eine differenzierbare Funktion f derart geben, dass $u(x,y) = f(3x+y)$ für alle x,y gilt. Nun ist

$$u(x,0) = f(3x) \stackrel{!}{=} \cos(x),$$

und das erzwingt $f(x) = \cos(\frac{1}{3}x)$. Insgesamt folgt

$$u(x,y) = \cos(\frac{1}{3}(3x+y)) = \cos(x + \frac{y}{3}).$$

b) Es handelt sich um eine Wellengleichung mit $c = 1$. Sei $f(x) := 2x^3$ die Anfangsauslenkung und $g(x) = 6x^2$ die Anfangsgeschwindigkeit. Nach der d'Alembert-Formel ist die Lösung durch

$$\begin{aligned} u(x,t) &= \tfrac{1}{2}(f(x+ct) + f(x-ct)) + \tfrac{1}{2c}\textstyle\int_{x-ct}^{x+ct} g(s)ds = \\ &= \tfrac{1}{2}(2(x+t)^3 + 2(x-t)^3) + \tfrac{1}{2}\textstyle\int_{x-t}^{x+t} 6s^2 ds = \\ &= (x+t)^3 + (x-t)^3 + \tfrac{1}{2}[2s^3]_{x-t}^{x+t} = \\ &= (x+t)^3 + (x-t)^3 + [s^3]_{x-t}^{x+t} = \\ &= (x+t)^3 + (x-t)^3 + (x+t)^3 - (x-t)^3 = 2(x+t)^3 \end{aligned}$$

gegeben.

c) Es handelt sich um eine Wärmeleitungsgleichung mit $c = 2$. Nach Vorlesung hat die Lösung von dem Problem $(\mathscr{P})$ die Form

$$\begin{aligned} u(x,t) &= \textstyle\sum_{n=1}^{\infty} C_n \sin(\frac{n\pi}{\ell}x)\exp(-(c\frac{n\pi}{\ell})^2 t) = \\ &= \textstyle\sum_{n=1}^{\infty} C_n \sin(nx)\exp(-4n^2 t), \end{aligned}$$

und es gilt

$$u(x,0) = \sum_{n=1}^{\infty} C_n \sin(nx) \stackrel{!}{=} \sin(x) + \sin(2x) + 10\sin(3x).$$

Man muss nur die Koeffizienten C_n so ermitteln, dass an der mit (!) gekennzeichneten Stelle Gleichheit herrscht. Man kommt durch Koeffizientenvergleich auf $C_1 = 1, C_2 = 1, C_3 = 10$ und $C_n = 0 \forall n \geq 4$. Also gilt

$$u(x,t) = \sin(x)\exp(-4t) + \sin(2x)\exp(-16t) + 10\sin(3x)\exp(-36t).$$