KLAUSUR

Differentialgleichungen

2.03.2012

(W. Strampp)

Name:	Vorname:	Matr.–Nr.:	Studiengang:

Für jede Aufgabe gibt es 8 Punkte. Zum Bestehen der Klausur sollten 16 Punkte erreicht werden.

1)	2)	3)	4)

Punkte:	Note:

Fangen Sie für jede Aufgabe ein neues Blatt an.
Beschreiben Sie nur die Vorderseite der Blätter.
Geben Sie alle Rechenschritte an!

1. (a) Diskutieren Sie die Stabilität der Nulllösung bei dem System:

$$\begin{pmatrix} y_1' \\ y_2' \\ y_3' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 & -6 & 0 \\ 3 & 5 & 0 \\ 3 & 3 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} .$$

   (b) Diskutieren Sie die Stabilität der Nulllösung bei der Gleichung:

$$y''' + 2\,y'' + 5\,y' = 0\,.$$

2. (a) Diskutieren Sie die Stabilität der Nulllösung bei dem System:

$$\begin{pmatrix} y_1' \\ y_2' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} y_1^3 \\ y_2^2\, y_1 \end{pmatrix}$$

   mit der Methode der Linearisierung.
   (b) Zeigen Sie die asymptotische Stabilität der Nulllösung bei dem System:

$$y_1' = -y_1^5 + 3\,y_2\,, \quad y_2' = -2\,y_1 - y_2^3\,.$$

   Versuchen Sie, eine Ljapunow-Funktion der Gestalt $V(x,y) = \alpha\, y_1^2 + \beta\, y_2^2$ zu finden.

3. (a) Lösen Sie das folgende Anfangswertproblem für die Wellengleichung

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\,, u(x,0) = f(x)\,, \frac{\partial u}{\partial t} u(x,0) = 0\,, x \in \mathbb{R}\,,$$

$$f(x) = x\,, 0 \le x \le \frac{1}{2}\,, f(x) = -x + 1\,, \frac{1}{2} \le x \le 1\,, f(x) = 0\,, \text{sonst}\,,$$

   mit der Methode von d'Alembert. Zeichnen Sie eine Skizze der Lösung für $t = 0, \frac{1}{4}, \frac{1}{2}, \frac{3}{4}, 1$.
   (b) Stellen Sie die Lösung $u(x,t)$ des Anfangsrandwertproblems für die Wärmeleitungsgleichung

$$\frac{\partial u}{\partial t} = c^2\, \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\,, u(x,0) = f(x)\,,$$

$$0 \leq x \leq l\,, u(0,t) = u(l,t) = 0\,, 0 \leq t\,,$$

mit einer Fourierreihe dar, und schreiben Sie $u(x,t)$ in der Form:

$$u(x,t) = \int_0^l K(x,\xi,t)\, f(\xi)\, d\xi\,.$$

4. Welche Lösungen ergeben sich für das Randwertwertproblem:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = u\,, 0 \leq x \leq a\,, y \in \mathbb{R}\,,$$

$$u(0,y) = u(a,y) = 0\,,$$

mit dem Separationsansatz: $u(x,y) = F(x)\,G(y)\,$?

Lösungen

1a)

$$\det\begin{pmatrix} -4-\lambda & -6 & 0 \\ 3 & 5-\lambda & 0 \\ 3 & 3 & 2-\lambda \end{pmatrix} = -(\lambda-2)^2\,(\lambda+1) = 0$$

$$\lambda_1 = \lambda_2 = 2\,,\lambda_3 = -1\,,$$

Realteil $\lambda_1 > 0$, Nulllösung instabil.

1b)

$$\lambda^3 + 2\,\lambda^2 + 5\,\lambda = 0$$

$$\lambda_1 = 0\,,\lambda_{2,3} = -1 \pm 2\,i\,,$$

Alle Realteile ≤ 0. ($\lambda_1 = 0$ einfache Nullstelle). Stabilität. Keine asymptotische Stabilität.

2a) Die Jacobi-Matrix der rechten Seite im Nullpunkt lautet:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

mit den Eigenwerten: $\lambda_1 = -1$, $\lambda_2 = 1$. Es folgt: Instabilität.

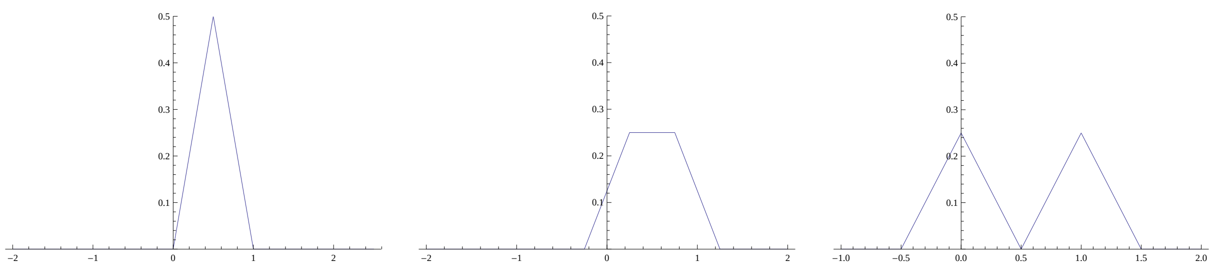
2b)

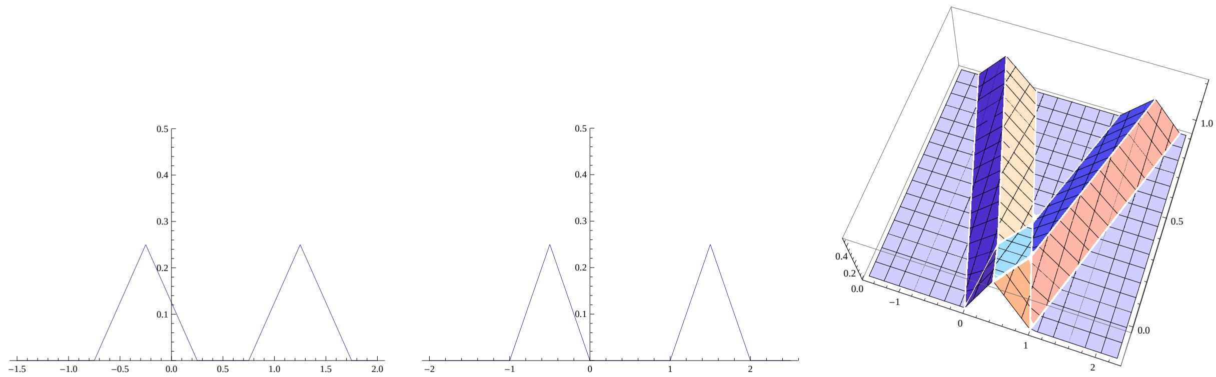
$$\begin{aligned} & \frac{\partial V}{\partial y_1}(y_1,y_2)\,(-y_1^5 + 3\,y_2) + \frac{\partial V}{\partial y_2}(y_1,y_2)\,(-2\,y_1 - y_2^3) \\ = \;& 2\,\alpha\,y_1\,(-y_1^5 + 3\,y_2) + 2\,\beta\,(-2\,y_1 - y_2^3) \\ = \;& 2\,(-\alpha\,y_1^6 + 3\,\alpha\,y_1\,y_2 - 2\,\beta\,y_1\,y_2 - \beta\,y_2^4)\,. \end{aligned}$$

Wähle $\alpha > 0$, $\beta > 0$, $\beta = \frac{3}{2}\,\alpha$, dann wird V zur Ljapunow-Funktion. Die Nulllösung ist asymptotisch stabil.

3.a)

$$u(x,t) = \frac{1}{2}\,(f(x+t) + f(x-t))$$





Die Lösung $u(x,t)$ für $t = 0, \frac{1}{4}, \frac{1}{2}, \frac{3}{4}, 1$ und Plot der Lösung über der $x-t$-Ebene

3.b) Die Lösung des Anfangsrandwertproblems

$$\frac{\partial u}{\partial t} = c^2 \, \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \,, u(x,0) = f(x) \,,$$

$$0 \leq x \leq l \,, u(0,t) = u(l,t) = 0 \,, 0 \leq t \,,$$

bekommen wir zunächst mit einer Fourierreihe:

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} C_n \, \sin\left(\frac{n\,\pi}{l}\,x\right) \, e^{-\lambda_n^2\,t} \,, \lambda_n = c\,\frac{n\,\pi}{l}$$

mit den Fourier-Koeffizienten:

$$C_n = \frac{2}{l} \int_0^l f(x) \, \sin\left(\frac{n\,\pi}{l}\,x\right) \, dx \,.$$

Einsetzen und Verauschen von Summation und Integration ergibt:

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2}{l} \int_0^l f(\xi) \, \sin\left(\frac{n\,\pi}{l}\,\xi\right) \, d\xi \right) \, \sin\left(\frac{n\,\pi}{l}\,x\right) \, e^{-\lambda_n^2\,t} \,,$$

$$u(x,t) = \int_0^l \left(\frac{2}{l} \sum_{n=1}^{\infty} f(\xi) \, \sin\left(\frac{n\,\pi}{l}\,\xi\right) \, \sin\left(\frac{n\,\pi}{l}\,x\right) \, e^{-\lambda_n^2\,t} \right) \, d\xi \,,$$

$$u(x,t) = \int\limits_0^l \left(\frac{2}{l} \sum_{n=1}^{\infty} \sin\left(\frac{n\,\pi}{l}\,\xi\right) \sin\left(\frac{n\,\pi}{l}\,x\right) e^{-\lambda_n^2\,t} \right) f(\xi)\,d\xi\,.$$

Wir haben folgende Quelllösung:

$$K(x,\xi,t) = \frac{2}{l} \sum_{n=1}^{\infty} \sin\left(\frac{n\,\pi}{l}\,x\right) \sin\left(\frac{n\,\pi}{l}\,\xi\right) e^{-\lambda_n^2\,t}\,.$$

4)

$$\frac{\frac{d^2F}{dx^2}(x)}{F(x)} = k = -p^2\,, p > 0\,,$$

$$\frac{\frac{d^2G}{dy^2}(y)}{G(y)} = (1-k) = 1+p^2\,, p > 0\,,$$

$$\frac{d^2F}{dx^2}(x) + p^2\,F(x) = 0\,,$$

$$\frac{d^2G}{dy^2}(y) - (1+p^2)\,G(y) = 0\,,$$

Randbedingung:

$$F(x) = A\,\cos(p\,x) + B\,\sin(p\,x)$$

$$F(0) = 0 \implies A = 0\,, F(a) = 0 \implies p = p_n = \frac{n\,\pi}{a}\,, n \in \mathbb{N}\,.$$

$$G(y) = C_n\,e^{\sqrt{1+p_n^2}\,y} + D_n\,e^{-\sqrt{1+p_n^2}\,y}$$

$$u(x,y) = \sin(p_n\,x)\,(C_n\,e^{\sqrt{1+p_n^2}\,y} + D_n\,e^{-\sqrt{1+p_n^2}\,y})\,.$$