KLAUSUR

Differentialgleichungen

1.3.2013

(W. Strampp)

Name:	Vorname:	Matr.–Nr.:	Studiengang:

Unterschrift:

Für jede Aufgabe gibt es 8 Punkte. Zum Bestehen der Klausur sind 15 Punkte erforderlich.

1)	2)	3)	4)

Punkte:	Note:

Fangen Sie für jede Aufgabe ein neues Blatt an.
Beschreiben Sie nur die Vorderseite der Blätter.
Geben Sie alle Rechenschritte an!

1. (a) Diskutieren Sie die Stabilität der Nulllösung
$\begin{pmatrix} y_1(x) \\ y_2(x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ bei dem folgenden System:

$$\begin{pmatrix} y_1' \\ y_2' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 2 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} .$$

(b) Zeigen Sie die asymptotische Stabilität der Nulllösung
$\begin{pmatrix} y_1(x) \\ y_2(x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ bei dem System:

$$y_1' = -y_1^5 - y_2^3 \,,$$

$$y_2' = y_1^3 - y_2^5 \,,$$

mithilfe einer Ljapunow-Funktion $V(y_1, y_2) = \alpha_1 \, y_1^4 + \alpha_2 \, y_2^4$.

2. Diskutieren Sie die Stabilität der Nulllösung $\begin{pmatrix} y_1(x) \\ y_2(x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ bei dem System:

$$y_1' = y_2 \,,$$
$$y_2' = -\sin(y_1) - y_2$$

(a) mit der Methode der Linearisierung,

(b) mit der Ljapunov-Funktion:

$$V(y_1, y_2) = 4\,(1 - \cos(y_1)) + y_2^2 + (y_1 + y_2)^2 \,.$$

Bitte wenden!

3. (a) Lösen Sie das folgende Anfangswertproblem mit der Methode von d'Alembert:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\,, \quad u(x,0) = \sin(x)\,, \frac{\partial u}{\partial t}(x,0) = \sin(2\,x)$$

und bestimmen Sie die Werte $u(0,t)$ und $u(\pi,t)$.

(b) Das Anfangsrandwertproblem

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\,,$$

$u(x,y,t) = 0$ für $x = 0, x = 1, y = 0, y = 1$, $u(x,y,0) = f(x,y)$, $\dfrac{\partial u}{\partial t}(x,y,0) = g(x,y)$,

(für $0 \le x \le 1$, $0 \le y \le 1$, $0 \le t$), besitzt folgende Lösung:

$$u(x,y,t) = \sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty} u_{m,n}(x,y,t) \text{ mit Eigenschwingungen:}$$

$$u_{m,n}(x,y,t) = (C_{mn}\,\cos(\lambda_{mn}\,t) + D_{mn}\,\sin(\lambda_{mn}\,t))\,\sin(m\,\pi\,x)\,\sin(n\,\pi\,y)\,,$$

$$\lambda_{mn} = \pi\,\sqrt{m^2+n^2}\,.$$

Wie lautet die Lösung für $f(x,y) = \sin(3\,\pi\,x)\,\sin(4\,\pi\,y) + \sin(4\,\pi\,x)\,\sin(3\,\pi\,y)$, $g(x,y) = 0$? Zeichnen Sie die Knotenlinien der Eigenschwingung $u_{4,3}(x,y,t)$.

4. Gegeben sei die Wärmeleitungsgleichung:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\,, \quad x \in \mathbb{R}\,, 0 \le t\,.$$

(a) Lösen Sie das Anfangsrandwertproblem $0 \le x \le \pi\,, 0 \le t$:

$$u(0,t) = u(\pi,t) = 0\,, \quad u(x,0) = \sin(x)\,.$$

(b) Das Anfangswertproblem $x \in \mathbb{R}\,, 0 \le t$:

$$u(x,0) = f(x) = \begin{cases} \sin(x) & , \quad 0 \le x \le \pi\,, \\ 0 & , \quad \text{sonst}\,. \end{cases}$$

besitzt eine Lösung der Gestalt: $u(x,t) = 2\displaystyle\int_0^\infty (A(\omega)\,\cos(\omega\,x) + B(\omega)\,\sin(\omega\,x))\,e^{-\omega^2 t}\,d\omega\,.$

Geben Sie die Koeffizienten A und B an. ($\sin(\alpha)\,\cos(\beta) = \frac{1}{2}\,(\sin(\alpha-\beta) + \sin(\alpha+\beta))$, $\sin(\alpha)\,\sin(\beta) = \frac{1}{2}\,(\cos(\alpha-\beta) - \cos(\alpha+\beta))$).

(c) Nennen Sie eine weitere Methode zur Lösung des Anfangswertproblems aus (b).

Lösungen

1a)

$$\det\begin{pmatrix} 3-\lambda & 1 \\ 2 & -3-\lambda \end{pmatrix} = \lambda^2 - 11 = 0$$

$$\lambda_{1,2} = \pm\sqrt{11}\,.$$

Nulllösung ist instabil. **3P**

1b)

$$\begin{aligned} & \frac{\partial V}{\partial y_1}(y_1,y_2)\,(-y_1^5 - y_2^3) + \frac{\partial V}{\partial y_2}(y_1,y_2)\,(y_1^3 - y_2^5) \\ = \;& 4\,\alpha_1\,y_1^3\,(-y_1^5 - y_2^3) + 4\,\alpha_2\,y_2^3\,\,(y_1^3 - y_2^5) \\ = \;& -4\,\alpha_1\,y_1^8 - 4\,\alpha_2\,y_2^8 - 4\,\alpha_1\,y_1^3\,y_2^3 + 4\,\alpha_2\,y_1^3\,y_2^3\,. \end{aligned}$$

Wähle $\alpha_1 = \alpha_2 = 1$.

$$\frac{\partial V}{\partial y_1}(y_1,y_2)\,(-y_1^5 - y_2^3) + \frac{\partial V}{\partial y_2}(y_1,y_2)\,(y_1^3 - y_2^5) = -4\,y_1^8 - 4\;y_2^8\,.$$

$V(y_1,y_2) > 0$, $(y_1,y_2) \neq (0,0)$, $\frac{d}{dx}V(y_1(x),y_2(x)) < 0$, $(y_1,y_2) \neq (0,0)$.
Die Nulllösung ist asymptotisch stabil. **5P**

2a) Linearisiertes System:

$$\begin{pmatrix} y_1' \\ y_2' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} .$$

Eigenwerte der Systemmatrix:

$$\det \begin{pmatrix} -\lambda & 1 \\ -1 & -1-\lambda \end{pmatrix} = \lambda^2 + \lambda + 1 = 0 \,,$$

$$\lambda_{1,2} = -\frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{1}{4} - 1} = -\frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{3}}{2}\, i \,.$$

Negativer Realteil, also asymptotische Stabilität. **4P**

2b) Ljapunov-Funktion:

$$V(y_1, y_2) = 4\,(1 - \cos(y_1)) + y_2^2 + (y_1 + y_2)^2 \,.$$

Es gilt:

$$V(0,0) = 0 \,, \quad V(y_1, y_2) > 0 \text{ für } (y_1, y_2) \neq (0,0) \,,$$

und

$$\begin{aligned} \mathrm{grad} V(y_1, y_2) \begin{pmatrix} y_2 \\ -\sin(y_1) - y_2 \end{pmatrix} &= (4\,\sin(y_1) + 2\,(y_1 + y_2)\,,\; 2\,y_2 + 2\,(y_1 + y_2)) \\ &\quad \begin{pmatrix} y_2 \\ -\sin(y_1) - y_2 \end{pmatrix} \\ &= -2\,(y_2^2 + y_1\,\sin(y_1)) \leq 0 \,. \end{aligned}$$

Somit $\mathrm{grad} V(y_1, y_2) \begin{pmatrix} y_2 \\ -\sin(y_1) - y_2 \end{pmatrix} = 0$ für $(y_1, y_2) = (0,0)$ und < 0 für $(y_1, y_2) \in D = \{(y_1, y_2)\,|\, y_1 \in \mathbb{R}, -\pi < y_2 < \pi\}$. Die Nulllösung ist asymptotisch stabil. **4P**

3a) Nach der Methode von d' Alembert ergibt sich die Lösung:

$$\begin{aligned} u(x,t) &= \frac{1}{2}\,(\sin(x+t)+\sin(x-t)) + \frac{1}{2}\int\limits_{x-t}^{x+t} \sin(2\,\xi)\,d\xi \\ &= \frac{1}{2}\,(\sin(x+t)+\sin(x-t)) - \frac{1}{4}\,(\cos(2\,(x+t)) - \cos(2\,(x-t)))\;. \end{aligned}$$

$$u(0,t) = \frac{1}{2}\,(\sin(t)+\sin(-t)) + \frac{1}{2}\int\limits_{-t}^{t} \sin(2\,\xi)\,d\xi = 0\,. \quad \textbf{2P}$$

Da die Funktionen $\sin(t)$, $\sin(2\,t)$ ungerade sind.

$$u(\pi,t) = \frac{1}{2}\,(\sin(\pi+t)+\sin(\pi-t)) + \frac{1}{2}\int\limits_{\pi-t}^{\pi+t} \sin(2\,\xi)\,d\xi = 0\,,$$

wegen $\sin(\pi+t) = -\sin(\pi-t)$ und $\sin(2\,(\pi+t)) = -\sin(2\,(\pi-t))$. **2P**

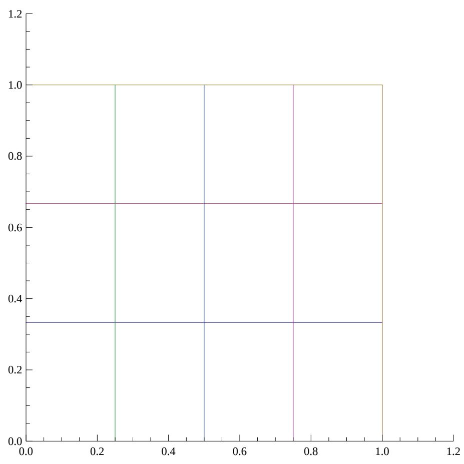
3b)

$$u(x,y,t) = \cos(5\,\pi\,t)\,(\sin(3\,\pi\,x)\,\sin(4\,\pi\,y) + \sin(4\,\pi\,x)\,\sin(3\,\pi\,y))\,. \quad \textbf{2P}$$

Knotenlinien:

$u_{4,3}(x,y,t) = (C_{4,3}\,\cos(\lambda_{4,3}\,t) + D_{4,3}\,\sin(\lambda_{4,3}\,t))\,\sin(4\,\pi\,x)\,\sin(3\,\pi\,y) = 0\,,$

$\sin(4\,\pi\,x) = 0 \implies x = 0, \frac{1}{4}, \frac{2}{4}, \frac{3}{4}, 1\,, \sin(3\,\pi\,y) = 0 \implies y = 0, \frac{1}{3}, \frac{2}{3}, 1\,.$ **2P**



Knotenlinien

4a) Die Lösung des Anfangsrandwertproblems (Stab endlicher Länge) lautet:

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} C_n \sin(n\,x)\, e^{-n^2\,t}\,, \quad C_n = \frac{2}{\pi} \int\limits_0^{\pi} \sin(x)\, \sin(n\,x)\, dx\,.$$

Wir $C_1 = 1$. Alle anderen Fourierkoeffizienten ergeben null.

$$u(x,t) = \sin(x)\, e^{-t}\,. \quad \mathbf{3P}$$

4b) Die Lösung des Anfangswertproblems (Stab unendlicher Länge) lautet:

$$u(x,t) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} (A(\omega)\, \cos(\omega\, x) + B(\omega)\, \sin(\omega\, x))\, e^{-\omega^2\,t}\, d\omega\,.$$

Dabei nehmen die Koeffizienten folgende Gestalt an:

$$\begin{aligned}
A(\omega) &= \frac{1}{2\,\pi} \int\limits_{-\infty}^{\infty} f(\xi)\, \cos(\omega\,\xi)\, d\xi = \frac{1}{2\,\pi} \int\limits_0^{\pi} \sin(\xi)\, \cos(\omega\,\xi)\, d\xi \\
&= \frac{1}{(1-\omega^2)\,2\,\pi} (1+\cos(\omega\,\pi))\,, \\
B(\omega) &= \frac{1}{2\,\pi} \int\limits_{-\infty}^{\infty} f(\xi)\, \sin(\omega\,\xi)\, d\xi = \frac{1}{2\,\pi} \int\limits_0^{\pi} \sin(\xi)\, \sin(\omega\,\xi)\, d\xi \\
&= \frac{1}{(1-\omega^2)\,2\,\pi}\, \sin(\omega\,\pi)\,. \quad \mathbf{4P}
\end{aligned}$$

4c) Grundlösung (Quelllösung):

$$u(x,t) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4\,t}}}{2\,\sqrt{\pi\,t}}\, f(\xi)\, d\xi\,. \quad \mathbf{1P}$$