KLAUSUR

Differentialgleichungen

10.3.2014

(W. Strampp)

Name:	Vorname:	Matr.–Nr.:	Studiengang:

Unterschrift:

Für jede Aufgabe gibt es 8 Punkte. Zum Bestehen der Klausur sind 15 Punkte erforderlich.

1)	2)	3)	4)

Punkte:	Note:

Fangen Sie für jede Aufgabe ein neues Blatt an.
Beschreiben Sie nur die Vorderseite der Blätter.
Geben Sie alle Rechenschritte an!

1. (a) Zeigen Sie die asymptotische Stabilität der Nulllösung bei der Gleichung:
$$y''' + 4\,y'' + 9\,y' + 10\,y = 0\,.$$
(Hinweis: $y(x) = e^{-2\,x}$ ist eine Lösung).
(b) Wie muss man $\alpha \in \mathbb{R}$ wählen, damit die Nulllösung bei dem folgenden System asymptotisch stabil wird:
$$\begin{pmatrix} y_1' \\ y_2' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ \alpha & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}?$$
(c) Zeigen Sie die asymptotische Stabilität der Nulllösung bei dem System:
$$\begin{aligned} y_1' &= \cos(y_1) - 1 + y_2\,, \\ y_2' &= -y_1 - 3\,\sin(y_2)\,, \end{aligned}$$
mit der Methode der Linearisierung.

2. (a) Zeigen Sie die asymptotische Stabilität der Nulllösung bei dem System
$$y_1' = -y_1^5 + 2\,y_2\,, \quad y_2' = -2\,y_1 - y_2^3$$
mithilfe der Ljapunow-Funktion $V(y_1, y_2) = y_1^2 + y_2^2$.
(b) Diskutieren Sie die Stabilität der Nulllösung bei dem System
$$y_1' = y_2\,, \quad y_2' = -4\,y_1 - y_1^2\,,$$
mit der Methode der Linearisierung und anschließend mit einer Ljapunow-Funktion der Gestalt: $V(y_1, y_2) = \frac{y_2^2}{2} + v(y_1)$.

Bitte wenden!

3. (a) Gegeben ist die Wellengleichung:

$$5\,\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 4\,\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\,.$$

Lösen Sie das Anfangsrandwertproblem

$$u(x,0) = 2\,\sin(\pi\,x)\,,\,\frac{\partial u}{\partial t}u(x,0) = \sin(4\,\pi\,x)\,,u(0,t) = u(1,t) = 0\,.$$

mit der Fourier-Methode und anschließend mit der Methode von d'Alembert.

(b) Gegeben ist die Wärmeleitungsgleichung:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\,.$$

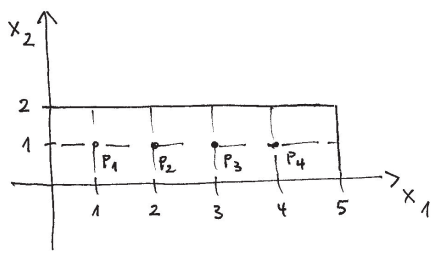
Lösen Sie das Anfangsrandwertproblem:

$$u(0,t) = u(\pi,t) = 0\,,\quad u(x,0) = \sin(x) + 3\,\sin(3\,x)\,.$$

4. Betrachten Sie das Randwertproblem für die Potentialgleichung:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2}(x) + \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2}(x) = 0\,,\quad x \in D\,,\quad u(x) = f(x)\,,\quad x \in \partial(D)\,.$$

(a) Sei $D = \{x = (x_1, x_2)\,,\, 0 \le x_1 \le 5,\, 0 \le x_2 \le 2\}$.



Auf dem Rand gelte: $f(2,0) = 1$, $f(2,2) = 1$ und $f = 0$ sonst. Geben Sie ein lineares Gleichungssystem in Matrixform zur Berechnung der Lösung in den Punkten: $P_1 = (1,1)$, $P_2 = (2,1)$, $P_3 = (3,1)$, $P_4 = (4,1)$, mit dem Differenzenverfahren:

$$u(x_1,x_2) = \frac{1}{4}\,\left(u\,(x_1+1,x_2) + u\,(x_1-1,x_2) + u\,(x_1,x_2+1) + u\,(x_1,x_2-1)\right)\,.$$

(b) Sei $D = \{x = (x_1,x_2) = (r\cos(\phi), r\sin(\phi)), 0 < r \le 2, 0 \le \phi \le 2\pi\}$.
Auf dem Rand gelte: $f(2\cos(\phi), 2\sin(\phi)) = 1 + 3\,\cos(5\,\phi)$.
Wie lautet die Lösung in Polarkoordinaten?
(Ansatz: $u(r,\phi) = A_0 + \sum_{n=1}^{\infty} r^n\,(A_n\,\cos(n\,\phi) + B_n\,\sin(n\,\phi))$.)

Lösungen

1a)

$$\lambda^3 + 4\,\lambda^2 + 9\,\lambda + 10 = 0$$

$$\lambda_1 = -2\,,\, (\lambda^3 + 4\,\lambda^2 + 9\,\lambda + 10) : (\lambda + 2) = \lambda^2 + 2\,\lambda^2 + 5\,,$$

$$\lambda_2 = -1 + 2\,i\,,\, \lambda_3 = -1 + 2\,i\,,$$

Alle Realteile < 0. Nulllösung ist asymptotisch stabil.

1b)

$$\det \begin{pmatrix} 1-\lambda & -1 \\ \alpha & -2-\lambda \end{pmatrix} = \lambda^2 + \lambda + \alpha - 2 = 0$$

$$\lambda_1 = -\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{9 - 4\,\alpha}\,, \quad \lambda_2 = -\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{9 - 4\,\alpha}\,,$$

$$9 - 4\,\alpha > 0 : \quad -1 + \sqrt{9 - 4\,\alpha} < 0$$

$$\sqrt{9 - 4\,\alpha} < 1 \Longleftrightarrow 9 - 4\,\alpha < 1 \text{ also } 2 < \alpha < \frac{9}{4}\,.$$

$$9 - 4\,\alpha \le 0 : \quad \frac{9}{4} \le \alpha$$

Insgesamt: $\alpha > 2$.

1c)

$$\frac{dG}{dY}(Y) = \begin{pmatrix} -\sin(y_1) & 1 \\ -1 & -3\,\cos(y_2) \end{pmatrix}\,, \quad \frac{dG}{dY}(0) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -3 \end{pmatrix}\,,$$

$$\det \begin{pmatrix} -\lambda & 1 \\ -1 & -3-\lambda \end{pmatrix} = \lambda^2 + 3\,\lambda + 1 = 0\,,$$

$$\lambda_{1,2} = -\frac{3}{2} \pm \frac{1}{2}\sqrt{5}\,,$$

$\lambda_{1,2} < 0$, Nulllösung ist asymptotisch stabil.

2a)

$$V(0,0) = 0\,, \quad V(y_1,y_2) > 0\,, (y_1,y_2) \neq (0,0)\,.$$

$$\frac{\partial V}{\partial y_1}(y_1,y_2)\,(-y_1^5+2\,y_2)+\frac{\partial V}{\partial y_2}(y_1,y_2)\,(-2\,y_1-y_2^3) = -2\,(y_1^6+y_2^4) < 0\,, (y_1,y_2) \neq (0,0)\,.$$

2b)

$$y_1' = y_2\,, \quad y_2' = -4\,y_1 - y_1^2\,,$$

$$\begin{pmatrix} y_1' \\ y_2' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -4 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}\,.$$

$$\det \begin{pmatrix} -\lambda & 1 \\ -4 & -\lambda \end{pmatrix} = \lambda^2 + 4 = 0\,,$$

$$\lambda_{1,2} = \pm 2\,i\,.$$

Keine Stabilitätsaussage möglich.

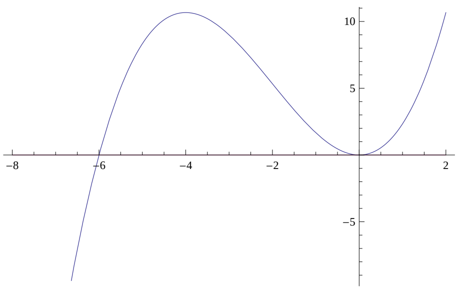
$$\frac{\partial V}{\partial y_1}(y_1,y_2)\,y_2 + \frac{\partial V}{\partial y_2}(y_1,y_2)\,(-4\,y_1 - y_2^2) = \frac{dv}{\partial y_1}(y_1)\,y_2 + y_2\,(-4\,y_1 - y_2^2)\,.$$

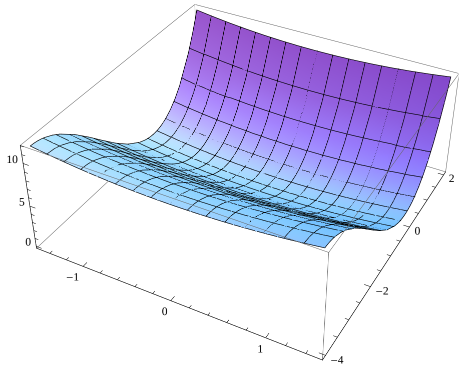
Wähle: $v(y_1) = 2\,y_1^2 + \frac{y_1^3}{3}$.

$$V(0,0) = 0\,, \quad V(y_1,y_2) > 0\,, (y_1,y_2) \in U(0,0)$$

$$\frac{\partial V}{\partial y_1}(y_1,y_2)\,y_2 + \frac{\partial V}{\partial y_2}(y_1,y_2)\,(-4\,y_1 - y_2^2) = 0\,.$$

Die Nulllösung ist stabil.





Die Funktion $v(y_1) = 2\,y_1^2 + \frac{y_1^3}{3}$ (links) und die Ljapunow-Funktion $V(y_1,y_2) = \frac{y_2^2}{2} + v(y_1)$ (rechts).

3a)

$$c^2 = \frac{4}{5}\,, c = \frac{2}{\sqrt{5}}\,, l = 1\,, \lambda_n = \frac{2}{\sqrt{5}}\,n\,\pi\,.$$

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty}\left(C_n\,\cos\left(\frac{2}{\sqrt{5}}\,n\,\pi\,t\right) + D_n\,\sin\left(\frac{2}{\sqrt{5}}\,n\,\pi\,t\right)\right)\,\sin(n\,\pi\,x)$$

$$f(x) = 2\,\sin(\pi\,x) = \sum_{n=1}^{\infty} C_n\,\sin(n\,\pi\,x)\,, C_1 = 2\,, C_n = 0\,, n \neq 1\,,$$

$$g(x) = \sin(4\,\pi\,x) = \sum_{n=1}^{\infty} D_n\,\lambda_n\,\sin(n\,\pi\,x)\,, D_4\,\lambda_4 = 1\,, D_n = 0\,, n \neq 2\,,$$

$$u(x,t) = 2\,\cos\left(\frac{2}{\sqrt{5}}\,\pi\,t\right)\,\sin(\pi\,x) + \frac{\sqrt{5}}{8\,\pi}\,\sin\left(\frac{2}{\sqrt{5}}\,4\,\pi\,\,t\right)\,\sin(4\,\pi\,x)\,.$$

$$u(x,t) = \frac{1}{2}\,(f(x+c\,t) + f(x-c\,t)) + \frac{1}{2\,c}\int\limits_{x-c\,t}^{x+c\,t} g(\xi)\,d\xi\,.$$

$$u(x,t) = \sin\left(x + \frac{2}{\sqrt{5}}\,t\right) + \sin\left(x - \frac{2}{\sqrt{5}}\,t\right) - \frac{\sqrt{5}}{16\,\pi}\left(\cos\left(x + \frac{2}{\sqrt{5}}\,t\right) - \cos\left(x - \frac{2}{\sqrt{5}}\,t\right)\right)$$

3b)

$$c = 1\,, l = \pi\,,$$

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} C_n\,\sin(n\,x)\,e^{-n^2\,t}\,,\quad f(x) = \sin(x) + 3\,\sin(3\,x) = \sum_{n=1}^{\infty} C_n\,\sin(n\,x)\,.$$

$C_1 = 1\,, C_3 = 3$. Alle anderen Fourierkoeffizienten ergeben null.

$$u(x,t) = \sin(x)\,e^{-t} + 3\,\sin(3\,x)\,e^{-9\,t}$$

4a)

$$u(P_1) = \frac{1}{4}\, u(P_2)\,,$$

$$u(P_2) = \frac{1}{4}\, u(P_1) + \frac{1}{4}\, u(P_3) + \frac{1}{2}\,,$$

$$u(P_3) = \frac{1}{4}\, u(P_2) + \frac{1}{4}\, u(P_4)\,,$$

$$u(P_4) = \frac{1}{4}\, u(P_3)\,,$$

$$\begin{pmatrix} 4 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 4 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 4 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u(P_1) \\ u(P_2) \\ u(P_3) \\ u(P_4) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} .$$

$\left(\text{Lösung:} \quad u(P_1) = \frac{30}{209}\,, u(P_2) = \frac{120}{209}\,, u(P_3) = \frac{32}{209}\,, u(P_4) = \frac{8}{209}\,.\right)$

4b)

$$u(r,\phi) = A_0 + \sum_{n=1}^{\infty} r^n \left(A_n\, \cos(n\,\phi) + B_n\, \cos(n\,\phi)\right).$$

$$u(2,\phi) = A_0 + \sum_{n=1}^{\infty} 2^n \left(A_n\, \cos(n\,\phi) + B_n\, \cos(n\,\phi)\right) = 1 + 3\, \cos(5\,\phi)$$

$$A_0 = 1\,, A_5 = \frac{3}{2^5}\,, A_n = 0, n \neq 0, 5\,, B_n = 0$$

$$u(r,\phi) = 1 + \frac{3}{2^5}\, r^5\, \cos(5\,\phi)\,.$$

Oder Koeffizienten berechnen:

$$A_0 = \frac{1}{2\,\pi} \int_0^{2\,\pi} f(\varphi)\, d\varphi\,, A_n = \frac{1}{2^n\,\pi} \int_0^{2\,\pi} f(\varphi)\, \cos(n\,\varphi)\, d\varphi\,, B_n = \frac{1}{2^n\,\pi} \int_0^{2\,\pi} f(\varphi)\, \sin(n\,\varphi)\, d\varphi\,.$$

(Umständlich).