KLAUSUR

Differentialgleichungen

3.3.2015

(W. Strampp)

Name:	Vorname:	Matr.–Nr.:	Studiengang:

Unterschrift:

Für jede Aufgabe gibt es 8 Punkte. Zum Bestehen der Klausur sind 15 Punkte erforderlich.

1)	2)	3)	4)

Punkte:	Note:

Fangen Sie für jede Aufgabe ein neues Blatt an.
Beschreiben Sie nur die Vorderseite der Blätter.
Geben Sie alle Rechenschritte an!

1. (a) Diskutieren Sie die Stabilität der Nulllösung bei der Gleichung:

$$y''' + 2\,y'' + 5\,y' = 0\,.$$

(b) Diskutieren Sie die Stabilität der Nulllösung bei dem folgenden System:

$$\begin{pmatrix} y_1' \\ y_2' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}\,.$$

(c) Diskutieren Sie die Stabilität der Nulllösung bei dem System:

$$\begin{pmatrix} y_1' \\ y_2' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} y_1^3 \\ y_2^2\,y_1 \end{pmatrix}$$

mit der Methode der Linearisierung.

2. (a) Zeigen Sie die asymptotische Stabilität der Nulllösung bei dem System:

$$y_1' = -y_1^5 + 3\,y_2\,, \quad y_2' = -2\,y_1 - y_2^3\,.$$

Versuchen Sie, eine Ljapunow-Funktion der Gestalt $V(y_1, y_2) = \alpha\,y_1^2 + \beta\,y_2^2$ zu finden.
(b) Diskutieren Sie die Stabilität der Nulllösung bei dem System:

$$y_1' = -y_2^3\,,$$

$$y_2' = y_1\,.$$

Stellen Sie eine Ljapunow-Funktion her mithilfe der Einzelgleichung:

$$\frac{dy_2}{dy_1} = -\frac{y_1}{y_2^3}\,.$$

Bitte wenden!

3. (a) Gegeben sei das folgende Anfangsrandwertproblem für die schwingende Saite:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \,,$$

$$u(0,t) = u(1,t) = 0 \,, \quad u(x,0) = \sin(3\,\pi\,x) \,, \quad \frac{\partial u}{\partial t}(x,0) = \sin(5\,\pi\,x) \,,$$

für $0 \leq x \leq 1$, $0 \leq t$. Lösen Sie das Problem mit der Fourier- und mit der d'Alembert-Methode.

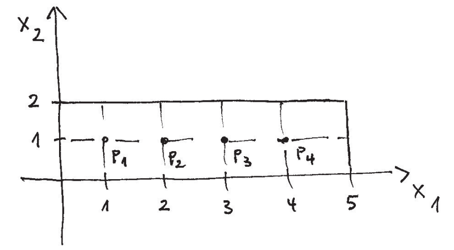
(b) Lösen Sie das folgende Anfangswertproblem für die Wärmeleitungsgleichung

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \,, \quad u(x,0) = e^{-|x|} \,, \quad x \in \mathbb{R} \,, 0 \leq t \,.$$

4. Betrachten Sie das Randwertproblem für die Potentialgleichung:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2} = 0 \,, \quad x \in D \,, \quad u(x) = f(x) \,, \quad x \in \partial(D) \,.$$

(a) Sei $D = \{(x_1, x_2) \,|\, 0 \leq x_1 \leq 5,\ 0 \leq x_2 \leq 2\}$.



Auf dem Rand gelte: $f(2,0) = 1$, $f(2,2) = 1$, $f(3,0) = 2$, $f(4,0) = -1$, $f(4,2) = -1$ und $f = 0$ sonst. Geben Sie ein lineares Gleichungssystem in Matrixform zur Berechnung der Lösung in den Punkten: $P_1 = (1,1)$, $P_2 = (2,1)$, $P_3 = (3,1)$, $P_4 = (4,1)$, mit dem Differenzenverfahren:

$$u(x_1, x_2) = \frac{1}{4}\left(u\left(x_1+1, x_2\right) + u\left(x_1-1, x_2\right) + u\left(x_1, x_2+1\right) + u\left(x_1, x_2-1\right)\right) \,.$$

(b) Sei $D = \{(r\cos(\phi), r\sin(\phi)) \,|\, r \geq 2, 0 \leq \phi \leq 2\pi\}$.
Auf dem Rand gelte: $f(2\cos(\phi), 2\sin(\phi)) = 1 + 3\,\cos(5\,\phi)$.
Wie lautet die Lösung in Polarkoordinaten?
(Ansatz: $u(r,\phi) = A_0 + \sum_{n=1}^{\infty} r^{-n}\left(A_n\,\cos(n\,\phi) + B_n\,\sin(n\,\phi)\right)$.)

Lösungen

1a)

$$\lambda^3 + 2\,\lambda^2 + 5\,\lambda = 0$$

$$\lambda_1 = 0\,, \lambda_{2,3} = -1 \pm 2\,i\,,$$

Alle Realteile ≤ 0. ($\lambda_1 = 0$ einfache Nullstelle). Stabilität. Keine asymptotische Stabilität.

1b)

$$\det \begin{pmatrix} 2-\lambda & 1 \\ 1 & -3-\lambda \end{pmatrix} = \lambda^2 + \lambda - 7 = 0$$

$$\lambda = -\frac{1}{2} \pm \frac{1}{2}\sqrt{29}\,,$$

Realteil $\lambda > 0$, Nulllösung ist instabil.

1c) Die Jacobi-Matrix der rechten Seite im Nullpunkt lautet:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

mit den Eigenwerten: $\lambda_1 = -1$, $\lambda_2 = 1$. Es folgt: Instabilität.

2a)

$$\begin{aligned}
& \frac{\partial V}{\partial y_1}(y_1,y_2)\,(-y_1^5+3\,y_2)+\frac{\partial V}{\partial y_2}(y_1,y_2)\,(-2\,y_1-y_2^3) \\
= \;& 2\,\alpha\,y_1\,(-y_1^5+3\,y_2)+2\,\beta\,y_2\,(-2\,y_1-y_2^3) \\
= \;& 2\,(-\alpha\,y_1^6+3\,\alpha\,y_1\,y_2-2\,\beta\,y_1\,y_2-\beta\,y_2^4)\,.
\end{aligned}$$

Wähle $\alpha > 0$, $\beta > 0$, $\beta = \frac{3}{2}\alpha$, dann wird V zur Ljapunow-Funktion. Die Nulllösung ist asymptotisch stabil.

2b)

$$\frac{dy_2}{dy_1} = -\frac{y_1}{y_2^3}\,.$$

$$\int y_2^3\,dy = -\int y_1\,dy_1$$

$$\frac{y_2^4}{4}+\frac{y_1^2}{2} = c\,,c \geq 0\,.$$

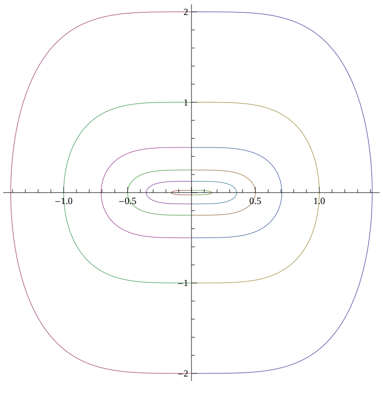
Die Funktion:

$$V(y_1,y_2) = \frac{y_2^4}{4}+\frac{y_1^2}{2}$$

stellt eine Ljapunov-Funktion dar.

$$\mathrm{grad}V(y_1,y_2)\begin{pmatrix}-y_2^3\\ y_1\end{pmatrix} = 0\,.$$

Oder: Die Lösungen verlaufen im Phasenraum auf geschlossenen Kurven um den Nullpunkt. Die Kurven können in beliebig kleine Kreise eingeschlossen werden. Die Nulllösung ist stabil.



Die Kurven $\frac{y_2^4}{4}+\frac{y_1^2}{2} = c$

3a) Fourier:

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} (C_n \, \cos(n\,\pi\,t) + D_n \, \sin(n\,\pi\,t)) \, \sin(n\,\pi\,x) \,.$$

$$f(x) = \sin(3\,\pi\,x) = \sum_{n=1}^{\infty} C_n \, \sin(n\,\pi\,x) \,.$$

$$g(x) = \sin(5\,\pi\,x) = \sum_{n=1}^{\infty} D_n \, n\,\pi \, \sin(n\,\pi\,x) \,.$$

$$u(x,t) = \cos(3\,\pi\,t) \, \sin(3\,\pi\,x) + \frac{1}{5\,\pi} \, \sin(5\,\pi\,t) \, \sin(5\,\pi\,x)$$

d'Alembert:

$$u(x,t) = \frac{1}{2} \, \sin(3\,\pi\,(x+t)) + \frac{1}{2} \, \sin(3\,\pi\,(x-t)) + \frac{1}{2} \int_{x-t}^{x+t} \sin(5\,\pi\,\xi) \, d\xi$$

$$u(x,t) = \frac{1}{2} \, \sin(3\,\pi\,(x+t)) + \frac{1}{2} \, \sin(3\,\pi\,(x-t)) - \frac{1}{10\,\pi} \, \cos(5\,\pi\,(x+t)) + \frac{1}{10\,\pi} \, \cos(5\,\pi\,(x-t))$$

3b)

$$u(x,t) = 2 \int_0^{\infty} (A(\omega) \, \cos(\omega\,x) + B(\omega) \, \sin(\omega\,x)) \, e^{-\omega^2\,t} \, d\omega \,,$$

$$\begin{aligned} A(\omega) &= \frac{1}{2\,\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-|\xi|} \, \cos(\omega\,\xi) \, d\xi = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} e^{-\xi} \, \cos(\omega\,\xi) \, d\xi = \frac{1}{\pi} \frac{1}{1+\omega^2} \\ B(\omega) &= \frac{1}{2\,\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-|\xi|} \, \sin(\omega\,\xi) \, d\xi = 0 \,. \end{aligned}$$

4a)

$$u(P_1) = \frac{1}{4}\,u(P_2)\,,$$

$$u(P_2) = \frac{1}{4}\,u(P_1) + \frac{1}{4}\,u(P_3) + \frac{1}{2}\,,$$

$$u(P_3) = \frac{1}{4}\,u(P_2) + \frac{1}{4}\,u(P_4) + \frac{1}{2}\,,$$

$$u(P_4) = \frac{1}{4}\,u(P_3) - \frac{1}{2}\,,$$

$$\begin{pmatrix} 4 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 4 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 4 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u(P_1) \\ u(P_2) \\ u(P_3) \\ u(P_4) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix}\,.$$

$$\left(\text{Lösung:}\quad u(P_1) = \frac{36}{209}\,, u(P_2) = \frac{144}{209}\,, u(P_3) = \frac{122}{209}\,, u(P_4) = -\frac{74}{209}\,.\right)$$

4b)

$$u(r,\phi) = A_0 + \sum_{n=1}^{\infty} r^{-n}\,(A_n\,\cos(n\,\phi) + B_n\,\cos(n\,\phi))\,.$$

$$u(2,\phi) = A_0 + \sum_{n=1}^{\infty} 2^{-n}\,(A_n\,\cos(n\,\phi) + B_n\,\cos(n\,\phi)) = 1 + 3\,\cos(5\,\phi)$$

$$A_0 = 1\,, A_5 = 3\cdot 2^5\,, A_n = 0, n \neq 0, 5\,, B_n = 0$$

$$u(r,\phi) = 1 + 3\cdot 2^5\,r^{-5}\,\cos(5\,\phi)\,.$$

Oder Koeffizienten berechnen:

$$A_0 = \frac{1}{2\,\pi}\int_0^{2\,\pi} f(\varphi)\,d\varphi\,, A_n = \frac{2^n}{\pi}\int_0^{2\,\pi} f(\varphi)\,\cos(n\,\varphi)\,d\varphi\,, B_n = \frac{2^n}{\pi}\int_0^{2\,\pi} f(\varphi)\,\sin(n\,\varphi)\,d\varphi\,.$$

(Umständlich).