Universität Kassel
Fachbereich 10/16
Dr. Sebastian Petersen

16.03.2016

# Klausur: Differentialgleichungen
## **Version mit Lösungen**

| Name: | Vorname: | Matrikelnummer: | Versuch: |
|---|---|---|---|
| | | | |

| Unterschrift: |
|---|
| |

Bitte fangen Sie für jede Aufgabe ein neues Blatt an. Beschreiben Sie nur die Vorderseite der Blätter.

Es können maximal **35** Punkte erreicht werden.

| Aufgabe 1 | Aufgabe 2 | Aufgabe 3 | Aufgabe 4 |
|---|---|---|---|
| | | | |

| Punkte: | **Note:** |
|---|---|
| | |

**Aufgabe 1.** (3+3+2=8 Punkte)

a) Lösen Sie das Anfangswertproblem $y' = xe^{-y}$, $y(0) = 1$ auf $G = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$.

b) Lösen Sie das Anfangswertproblem $y' = 2xy + \exp(x^2)$, $y(0) = 1$ auf $G = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$.

c) Wir betrachten das Anfangswertproblem

$$y' = \underbrace{3\sqrt[3]{y^2}}_{f(y)},\ y(0) = 0 \quad (\mathscr{A})$$

auf $G = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$. Entscheiden Sie, ob die folgende kursiv gedruckte Argumentation richtig ist. Falls die Argumentation falsch ist, so erläutern Sie kurz, wo der Fehler steckt.

*Die Funktion $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $\varphi(x) = x^3$ ist eine maximale Lösung von $(\mathscr{A})$. Die Funktion $G \to \mathbb{R}, (x, y) \mapsto f(y)$ (rechte Seite der DGL) ist partiell differenzierbar und genügt daher lokal einer Lipschitz-Bedingung. Nach dem Satz von Picard-Lindelöf ist $\varphi$ die einzige maximale Lösung von dem AWP $(\mathscr{A})$. Weitere maximale Lösungen hat $(\mathscr{A})$ nicht.*

**Aufgabe 2.** (2+2+2+3=9 Punkte)

a) Geben Sie ein Fundamentalsystem für die lineare Differentialgleichung

$$y' = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} y$$

an. (Anmerkung: Bei dieser Aufgabe ist nichts zu rechnen!)

b) Finden Sie ein reelles Fundamentalsystem für die skalare lineare Differentialgleichung $y'' + 4y = 0$.

c) Entscheiden Sie, ob das Randwertproblem

$$y'' + 4y = 0,\ y(0) = 1,\ y(\pi) = 5 \quad (\mathscr{R})$$

lösbar ist, und berechnen Sie die Lösung(en) gegebenenfalls. (Hinweis: Benutze das Ergebnis von Teil b)).

d) Bestimmen Sie eine partikuläre Lösung der inhomogenen linearen Differentialgleichung $y'' + 4y = x$. (Hinweis: Man benutze einen geeigneten Ansatz.)

**Aufgabe 3.** (4+2+3=9 Punkte)

a) Wir betrachten die autonome Differentialgleichung

$$y' = -y^3 + 4y^2 - 4y \quad (\mathscr{D})$$

auf dem Gebiet $G = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$. Bestimmen Sie die Ruhelagen von $(\mathscr{D})$, skizzieren Sie die Phasenlinie von $(\mathscr{D})$ und geben Sie für jede dieser Ruhelage an, ob diese instabil oder stabil ist. Bestimmen Sie ferner $\lim\limits_{x\to\infty} \varphi(x)$ für die maximale Lösung $\varphi$ von $(\mathscr{D})$, die $\varphi(0) = 5$ erfüllt.

b) Wir betrachten nun die lineare Differentialgleichung

$$\begin{pmatrix} y_1' \\ y_2' \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} -1 & 3 \\ -3 & -1 \end{pmatrix}}_{A} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} \quad (\mathscr{L})$$

Berechen Sie die Eigenwerte von $A$. Entscheiden Sie dann, welche der folgenden Aussagen (i)-(v) wahr ist:

(i) Das Phasenportrait von $(\mathscr{L})$ ist vom Typ "stabiler Spiralstrudel".
(ii) Das Phasenportrait von $(\mathscr{L})$ ist vom Typ "instabiler Spiralstrudel".
(iii) Das Phasenportrait von $(\mathscr{L})$ ist vom Typ "stabiler Knoten".
(iv) Das Phasenportrait von $(\mathscr{L})$ ist vom Typ "instabiler Knoten".
(v) Die Trajektorien sind Kreise mit Mittelpunkt $\vec{0}$.

(Wir geben bekannt, dass genau eine der Aussagen (i)-(v) wahr ist.)

c) Wir betrachten die autonome Differentialgleichung

$$\begin{pmatrix} y_1' \\ y_2' \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} \sin(-y_1 + y_2) + y_1 y_2 \\ \exp(y_1 - 3y_2) - 1 \end{pmatrix}}_{f(y)} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} \quad (\mathscr{A})$$

Offenbar ist $\vec{0}$ eine Ruhelage von $(\mathscr{A})$. Berechnen Sie die Eigenwerte von $Df(\vec{0})$ und entscheiden Sie mit Hilfe der Methode der Linearisierung, ob die Ruhelage $\vec{0}$ asymptotisch stabil / stabil / instabil ist.

**Aufgabe 4.** (3+3+3=9 Punkte)

a) Wir betrachten das folgende Anfangswertproblem für die Wellengleichung (schwingende Saite unendlicher Länge):

$$\left.\begin{array}{l} \partial_t\partial_t u(x,t) = 4\partial_x\partial_x u(x,t) \\ u(x,0) = 0 \ \forall x \in \mathbb{R} \\ \partial_t u(x,0) = \cos(3x) \ \forall x \in \mathbb{R} \end{array}\right\} (\mathscr{P}_1)$$

Man berechne die Lösung $u : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ von $(\mathscr{P}_1)$ mit der Methode von d'Alembert.

b) Wir betrachten das folgende Anfangsrandwertproblem für die Wärmeleitungsgleichung in einem Stab endlicher Länge $\ell = 1$:

$$\left.\begin{array}{l} \partial_t u(x,t) = \partial_x\partial_x u(x,t) \\ u(0,t) = u(1,t) = 0 \ \forall t \in \mathbb{R} \\ u(x,0) = 3\sin(\pi x) - 4\sin(5\pi x) \ \forall x \in [0,1] \end{array}\right\} (\mathscr{P}_2)$$

Man berechne die Lösung $u : [0,1] \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ von $(\mathscr{P}_2)$ mit der Fourier-Methode.

c) Finden Sie die Lösung $u : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ der PDE

$$\left.\begin{array}{l} \partial_x u(x,y) - \partial_y u(x,y) = 0 \\ u(t,t) = t^2 + 1 \ \forall t \in \mathbb{R} \end{array}\right\} (\mathscr{L}).$$

# Lösungsskizze

**Aufgabe 1.**

a) Betrachte das AWP $y' = xe^{-y}$, $y(0) = 1$ ($\mathscr{A}_1$). Wir lösen dieses AWP durch Trennen der Variablen. (Wir benutzen den entsprechenden Satz der Vorlesung. Die Voraussetzungen sind hier erfüllt.)

$$\begin{array}{rl} & \int_0^x s ds = \int_1^y e^t dt \\ \Rightarrow & \frac{1}{2}x^2 = e^y - e \\ \Rightarrow & y(x) = \log(\frac{1}{2}x^2 + e). \end{array}$$

Die Funktion $\mathbb{R} \to \mathbb{R}, x \mapsto \log(\frac{1}{2}x^2 + e)$ ist also die maximale Lsg. von ($\mathscr{A}_1$).

b) Betrachte das AWP $y' = 2xy + e^{x^2}$, $y(0) = 1$ ($\mathscr{A}_2$). Dies ist eine skalare lineare DGL erster Ordnung. Wir berechnen die Lösung durch Variation der Konstanten (vgl. Vorlesung). Sei $\varphi(x) = \exp(\int_0^x 2tdt) = e^{x^2}$ die Lösung von dem homogenen AWP $y' = 2xy$, $y(0) = 1$. Die Lösung $\psi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ von ($\mathscr{A}_2$) ist durch

$$\begin{array}{rcl} \psi(x) & = & \varphi(x) \left(1 + \int_0^x \varphi(t)^{-1} e^{t^2} dt\right) \\ & = & e^{x^2}(1 + \int_0^x dt) \\ & = & e^{x^2}(1 + x) \end{array}$$

gegeben.

c) Die Argumentation ist falsch! Die Funktion $f$ ist gar nicht partiell differenzierbar; die Voraussetzungen von Picard-Lindelöf sind nicht erfüllt. In der Tat hat dieses AWP übrigens mehrere maximale Lösungen: Zum Beispiel ist auch die Nullfunktion $\psi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \psi(x) = 0$ eine Lösung von ($\mathscr{A}$).

**Aufgabe 2.**

a) Wir betrachten die lineare Differentialgleichung

$$y' = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} y.$$

Die Matrix ist bereits in Jordan-Normalform. Nach einem wohlbekannten Satz ist also

$$\phi(x) = \begin{pmatrix} e^{-x} & xe^{-x} & 0 \\ 0 & e^{-x} & 0 \\ 0 & 0 & e^{3x} \end{pmatrix}$$

ein Fundamentalsystem zu dieser linearen DGL.

b) Betrachte die skalare lineare Differentialgleichung $y'' + 4y = 0$ ($\mathscr{S}$). Das charakteristische Polynom ist $P(T) = T^2 + 4$, dessen Nullstellen sind $2i$ und $-2i$. Also ist $(e^{2ix}, e^{-2ix})$ ein komplexes Fundamentalsystem von ($\mathscr{S}$). Durch $(\mathrm{Re}(e^{2ix}), \mathrm{Im}(e^{2ix})) = (\cos(2x), \sin(2x))$ ist dann ein reelles Fundamentalsystem von ($\mathscr{S}$) gegeben.

c) Aus Teil b) folgt sofort: Für jedes $c = (c_1, c_2) \in \mathbb{R}^2$ ist

$$\varphi_c(x) = c_1 \sin(2x) + c_2 \cos(2x)$$

eine Lösung von $(\mathscr{S})$; weitere (reelle) Lösungen hat $(\mathscr{S})$ nicht. Um die Frage nach der Lösbarkeit des RWPs $(\mathscr{R})$ zu beantworten, müssen wir entscheiden, ob es ein $c \in \mathbb{R}^2$ derart gibt, dass $\varphi_c(0) = 1$ und $\varphi_c(\pi) = 5$ gilt. Nun ist aber $\varphi_c(0) = c_2$ und $\varphi_c(\pi) = c_2$. Man sieht:

$$\varphi_c(0) = 1 \ \wedge \ \varphi_c(\pi) = 5 \Leftrightarrow c_2 = 1 \ \wedge \ c_2 = 5.$$

Dies ist für *kein* $c = (c_1, c_2) \in \mathbb{R}^2$ erfüllt (weil $c_2$ nicht gleichzeitig gleich 1 und gleich 5 sein kann). Das RWP $(\mathscr{R})$ ist also nicht lösbar.

d) Betrachte die inhomogenen lineare Differentialgleichung $y''+4y = x$ $(\mathscr{I})$. Nach einem Satz der Vorlesung gibt es eine Lösung $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ von $(\mathscr{I})$ der Form $\varphi(x) = ax + b$. Es gilt, $a$ und $b$ so zu bestimmen, dass $\varphi$ eine Lsg. von $(\mathscr{I})$ ist. Man berechnet $\varphi'(x) = a$, $\varphi''(x) = 0$. Man sieht:

$$\varphi'' + 4\varphi = x \Leftrightarrow \ 4ax + 4b = x \forall x \in \mathbb{R} \ \Leftrightarrow a = \frac{1}{4}, b = 0.$$

Eine partikuläre Lsg. von $(\mathscr{I})$ ist also durch $\varphi(x) = \frac{1}{4}x$ gegeben.

**Aufgabe 3.**

a) Wir betrachten die autonome Differentialgleichung

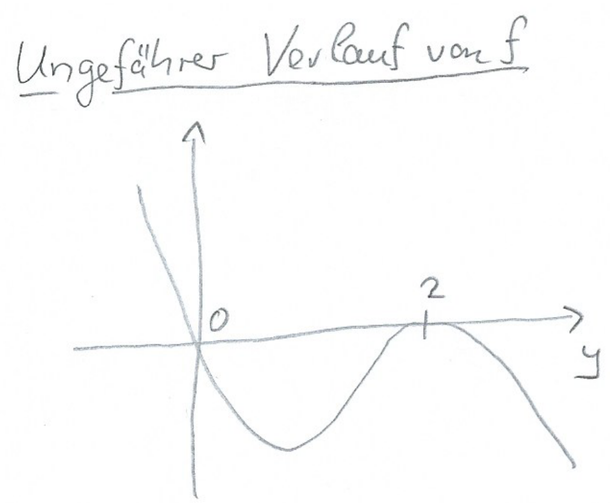
$$y' = \underbrace{-y^3 + 4y^2 - 4y}_{f(y)} \quad (\mathscr{D})$$

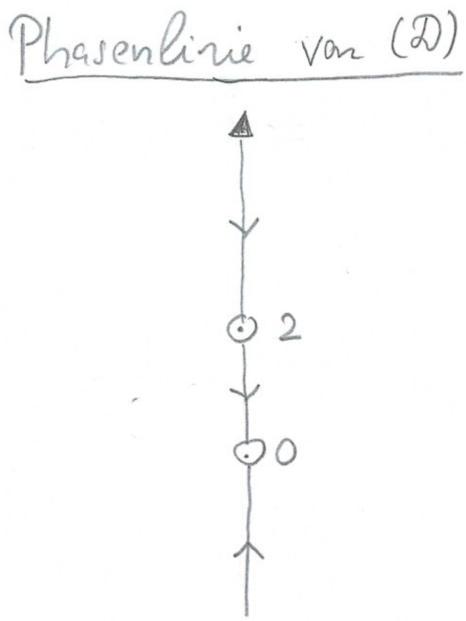
auf dem Gebiet $G = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$. Die Ruhelagen von $(\mathscr{D})$ sind die Nullstellen von $f$. Es gilt

$$f(y) = -y(y^2 - 2y + 4) = -y(y-2)^2.$$

Daher hat $(\mathscr{D})$ folgende Ruhelagen: $\xi_0 = 0$ und $\xi_1 = 2$.

Es gilt $f(y) \geq 0$ für $y \leq 0$ und $f(y) \leq 0$ für $y \geq 0$; die folgende Ansicht zeigt den ungefähren Verlauf von $f$ und die Phasenlinie von $(\mathscr{D})$:




Man sieht: 0 ist stabil, 2 ist instabil.

Ferner folgt: $\lim_{x\to\infty} \varphi(x) = 2$.

b) Das charakteristische Polynom von $A$ ist $P_A(T) = T^2 + 2T + 10$. Die Eigenwerte von $A$ (=die Nst. von $P_A(T)$) sind

$$\lambda_{1,2} = \frac{-2 \pm \sqrt{4-40}}{2} = -1 \pm 3i.$$

Da diese imaginär mit negativem Realteil sind, ist (nach Sätzen der Vorlesung) die Aussage (i) wahr.

c) Es gilt

$$Df(\vec{y}) = \begin{pmatrix} -\cos(-y_1+y_2)+y_2 & \cos(-y_1+y_2)+y_1 \\ \exp(y_1-3y_2) & -3\exp(y_1-3y_2) \end{pmatrix}$$

und

$$J := Df(\vec{0}) = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -3 \end{pmatrix}.$$

Es folgt $P_J(T) = T^2 + 4T + 2$. Die Eigenwerte von $J$ sind: $\frac{-4\pm\sqrt{16-8}}{2} = -2 \pm \sqrt{2}$. Die Eigenwerte sind reell und negativ. Nach dem Stabilitätssatz (vgl. Vorlesung V.4.2) ist $\vec{0}$ asymptotisch stabil (und insbesondere stabil).

**Aufgabe 4.**

a) Es geht um die Wellengleichung mit $c = 2$, Anfangsgeschwindigkeit $g(x) = \cos(3x)$ und Anfangsauslenkung $f(x) = 0$. Die d'Alembert-Formel liefert

$$\begin{aligned} u(x,t) &= \tfrac{1}{2}(f(x+ct)+f(x-ct)) + \tfrac{1}{2c}\int_{x-ct}^{x+ct} g(s)ds = \\ &= \tfrac{1}{4}\int_{x-2t}^{x+2t} \cos(3s)ds = \\ &= \tfrac{1}{12}(\sin(3(x+2t)) - \sin(3(x-2t))) \end{aligned}$$

b) Hier geht es um die Wärmeleitungsgleichung in einem Stab endlicher Länge $\ell = 1$ und mit $c = 1$. Nach dem Fourier-Ansatz ist

$$\begin{aligned} u(x,t) &= \sum_{n=1}^{\infty} C_n \sin\left(\tfrac{n\pi}{\ell}x\right)\exp\left(-\left(\tfrac{cn\pi}{\ell}\right)^2 t\right) \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} C_n \sin(n\pi x)\exp\left(-(n\pi)^2 t\right) \end{aligned}$$

wobei wir die $C_n$ so wählen müssen, dass

$$u(x,0) = \sum_{n=1}^{\infty} C_n \sin(n\pi x) \stackrel{!}{=} 3\sin(\pi x) - 4\sin(5\pi x)$$

für alle $x$ gilt. Dafür muss man $C_1 = 1$, $C_5 = -4$ und $C_n = 0 \forall n \notin \{1,5\}$ setzen. Es ergibt sich die Lösung

$$u(x,t) = 3\sin(\pi x)\exp(-\pi^2 t) - 4\sin(5\pi x)\exp(-25\pi^2 t).$$

c) Für eine Funktion $u : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ gilt genau dann $\partial_x u(x,y) - \partial_y u(x,y) = 0$, wenn $\nabla u(x,y)(1,-1)^T = 0$ gilt. Das ist genau dann der Fall, wenn überall $\nabla u(x,y)$ auf $(1,-1)$ senkrecht steht. Für ein solches $u$ sind die Höhenlinien also Geraden mit Richtungsvektor $(1,-1)$ (und daher mit Normalenvektor $(1,1)$). Also sind für ein solches $u$ die Höhenlinien genau die Geraden der Form $G_c : x + y = c$. Ein solches $u$ muss also von der Form $u(x,y) = v(x+y)$ mit einer geeigneten Funktion $v : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ sein. Wenn $u$ überdies $u(t,t) = t^2 + 1$ erfüllen soll, dann muss die Hilfsfunktion $v$ also $v(2t) = t^2 + 1$ erfüllen. Es ergibt sich mit der Substitution $s = 2t$, dass $v(s) = (\frac{1}{2}t)^2 + 1$ und daher $u(x,y) = \frac{1}{4}(x+y)^2 + 1$ gelten muss, wenn $u$ Lsg. der PDE $(\mathscr{L})$ ist. Umgekehrt prüft man leicht (im Kopf), dass durch $u(x,y) = \frac{1}{4}(x+y)^2 + 1$ wirklich eine Lsg. von $(\mathscr{L})$ gegeben ist.