Universität Kassel
Fachbereich 10/16
Dr. habil. Sebastian Petersen

13.03.2017

Klausur: Differentialgleichungen
Version mit Lösungsskizzen

Es können maximal **38** Punkte erreicht werden.

Aufgabe 1. (3+3+2=8 Punkte)

a) Lösen Sie das Anfangswertproblem

$$y' = \frac{1}{4y}(2x + \cos(x)),\ y(0) = 1$$

auf $G = \mathbb{R}\times]0, \infty[$. (Hinweis: Getrennte Variable!)

b) Lösen Sie das Anfangswertproblem

$$y' = x^{-1}y + x^{\frac{1}{4}},\ y(1) = 1$$

auf $G =]0, \infty[\times\mathbb{R}$. (Hinweis: Variation der Konstanten!)

c) Wir betrachten das Anfangswertproblem

$$y' = xy + 1,\ y(0) = 0 \quad (\mathscr{A})$$

auf $G = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$. Ausgehend von der konstanten Funktion $\varphi_0(x) \equiv 1$ berechne man die ersten beiden Picard-Lindelöf-Iterierten $\varphi_1 = T\varphi_0$ und $\varphi_2 = T\varphi_1$ für das Anfangswertproblem $(\mathscr{A})$. (T steht für den Picard-Lindelöf-Operator zu $(\mathscr{A})$.)

Lösung zu Aufgabe 1.

a) Es handelt sich um eine DGL mit getrennten Variablen. Wir machen den wohlbekannten Ansatz

$$\int_1^y 4s ds = \int_0^x (2t + \cos(t))dt,$$

was uns dann auf $2y^2 - 2 = x^2 + \sin(x)$ führt. Auflösen nach y ergibt, dass

$$y(x) = \sqrt{\frac{x^2 + \sin(x) + 2}{2}}$$

die Lösung des Anfangswertproblems ist. Der Definitionsbereich der Lösung ist $\mathbb{R}$.

b) Wir brauchen als Hilfsfunktion die Lösung

$$\varphi(x) = \exp(\int_1^x t^{-1}dt) = \exp(\log(x)) = x$$

von dem homogen-linearen AWP $[y' = x^{-1}y,\ y(1) = 1]$. Die Variation der Konstanten liefert die Lösung

$$\begin{aligned}\psi(x) &= \varphi(x)(1 + \textstyle\int_1^x \varphi(s)^{-1}s^{\frac{1}{4}}ds) = \\ &= x(1 + \textstyle\int_1^x s^{-1}s^{\frac{1}{4}}ds) = \\ &= x(1 + \textstyle\int_1^x s^{-\frac{3}{4}}ds) = \\ &= x(1 + 4x^{\frac{1}{4}} - 4) = x(4\sqrt[4]{x} - 3)\end{aligned}$$

($\psi :]0, \infty[\to \mathbb{R}$) von dem AWP ist.

c) Der Picard-Lindelöf-Operator dieser DGL ist durch

$$T\varphi(x) = \int_0^x (s\varphi(s) + 1)ds$$

gegeben. Daher gilt

$$\varphi_1(x) = T\varphi_0(x) = \int_0^x (s \cdot 0 + 1)ds = x$$

und

$$\varphi_2(x) = T\varphi_1(x) = \int_0^x (s^2 + 1)ds = \frac{1}{3}x^3 + x.$$

Aufgabe 2. (2+4+3=9 Punkte)

a) Wir betrachten die skalare homogen-lineare Differentialgleichung 5. Ordnung

$$y^{(5)} - 6y^{(4)} + 16y^{(3)} - 32y^{(2)} + 48y' - 32y = 0 \quad (\mathscr{L})$$

Wir geben bekannt, dass das charakteristische Polynom $P(T)$ von $(\mathscr{L})$ in faktorisierter Form durch

$$P(T) = (T + 2i)(T - 2i)(T - 2)^3$$

gegeben ist. Finden Sie ein reelles Fundamentalsystem für $(\mathscr{L})$.

b) Wir betrachten die skalare inhomogen-lineare DGL 2. Ordnung $y'' - 4y = e^{3x}$ $(\mathscr{D})$.

(i) Finden Sie ein Fundamentalsystem zu dem homogenen Anteil $y'' - 4y = 0$.

(ii) Berechnen Sie eine partikuläre Lösung von $(\mathscr{D})$. (Hinweis: Ansatzverfahren!)

c) Wir betrachten das ebene lineare System

$$y' = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -3 & -1 \end{pmatrix} y \quad (\mathscr{S})$$

Berechnen Sie das charakteristische Polynom der Systemmatrix und kreuzen Sie dann ohne weitere Begründung in der folgenden Liste die wahren Aussagen an.

- ☐ Das Phasenportrait von $(\mathscr{S})$ ist ein Spiralstrudel.
- ☐ Das Phasenportrait von $(\mathscr{S})$ besteht aus geschlossenen Kurven, die den Nullpunkt umlaufen.
- ☐ Die Ruhelage $\vec{0}$ von $(\mathscr{S})$ ist stabil.
- ☐ Die Ruhelage $\vec{0}$ von $(\mathscr{S})$ ist asymptotisch stabil.

Lösung zu Aufgabe 2.

a) Offenbar ist

$$(e^{2ix}, e^{-2ix}, e^{2x}, xe^{2x}, x^2e^{2x})$$

ein $\mathbb{C}$-Fundamentalsystem und

$$(\cos(2x), \sin(2x), e^{2x}, xe^{2x}, x^2e^{2x})$$

ein $\mathbb{R}$-Fundamentalsystem zu $(\mathscr{L})$.

b) (i) Das charakteristische Polynom ist $P(T) = T^2 - 4 = (T - 2)(T + 2)$. Daher ist (e^{2x}, e^{-2x}) ein (reelles) Fundamentalsystem zu $y'' - 4y = 0$.

(ii) Wir betrachten $y'' - 4y = e^{\omega x}$ mit $\omega = 3$. Da $\omega = 3$ keine Nullstelle von $P(T)$ ist, machen wir den Ansatz $\psi(x) = ce^{3x}$ und versuchen c so zu wählen, dass ψ eine Lösung von $(\mathscr{D})$ ist. Es gilt $\psi'(x) = 3ce^{3x}$ und $\psi''(x) = 9ce^{3x}$. Man sieht:

$$\begin{aligned} \psi \text{ ist Lsg. von } (\mathscr{D}) &\Leftrightarrow \psi'' - 4\psi = e^{3x} \\ &\Leftrightarrow 9ce^{3x} - 4ce^{3x} = e^{3x} \\ &\Leftrightarrow 9c - 4c = 1 \\ &\Leftrightarrow 5c = 1 \Leftrightarrow c = \tfrac{1}{5}. \end{aligned}$$

Also ist $\psi(x) = \frac{1}{5}e^{3x}$ eine Lsg. von $(\mathscr{D})$.

c) Das charakteristische Polynom ist $P(T) = T^2 + 8$. Die Fragen sind wie folgt zu beantworten: Nein / Ja / Ja / Nein

Aufgabe 3. (6+4=10 Punkte)

a) Wir betrachten die skalare autonome Differentialgleichung

$$y' = y^2(y^2 - 4) \quad (\mathscr{D})$$

(i) Berechnen Sie die Ruhelagen von $(\mathscr{D})$ und skizzieren Sie die Phasenlinie zu $(\mathscr{D})$.

(ii) Entscheiden Sie für jede Ruhelage von $(\mathscr{D})$, ob sie stabil oder instabil ist.

(iii) Sei nun φ die maximale Lösung von $(\mathscr{D})$, die $\varphi(0) = 0.5$ erfüllt. Berechnen Sie $\lim_{x\to\infty} \varphi(x)$ und $\lim_{x\to-\infty} \varphi(x)$. (Anmerkung: Es ist <u>nicht</u> verlangt, den Funktionsterm von φ aufzudecken.)

b) Wir betrachten das ebene autonome System

$$\begin{pmatrix} y_1' \\ y_2' \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} 2y_1 - e^{y_2} + 1 \\ 7\sin(y_1) + y_2 \end{pmatrix}}_{=:f(\vec{y})} \quad (\mathscr{S}).$$

(i) Berechnen Sie die Jacobi-Matrix $Df(y_1, y_2)$ und das charakteristische Polynom von $Df(0,0)$.

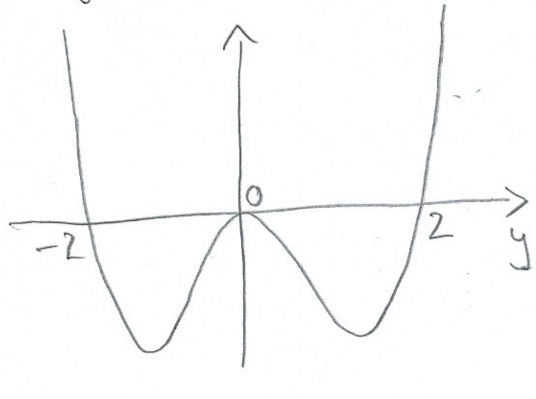
(ii) Offenbar ist $\vec{0}$ eine Ruhelage von $(\mathscr{S})$. Entscheiden Sie mit kurzer Begründung, ob diese Ruhelage $\vec{0}$ stabil oder instabil ist.

Lösung zu Aufgabe 3.

a) (i) Die Nullstellen von $f(y) := y^2(y^2 - 4) = (y+2)y^2(y-2)$ sind -2, 0 und 2. Dies sind auch die drei Ruhelagen von $(\mathscr{D})$. Offenbar gilt

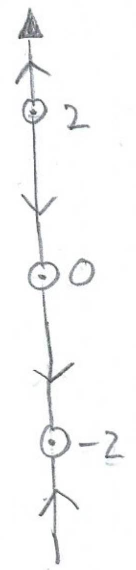
$$\begin{array}{ll} f(y) > 0 & \text{falls } y < -2, \\ f(y) < 0 & \text{falls } -2 < y < 0, \\ f(y) < 0 & \text{falls } 0 < y < 2 \text{ und} \\ f(y) > 0 & \text{falls } 2 < y \end{array}$$

Ungefährer Verlauf von f



Die Phasenlinie von $(\mathscr{D})$ sieht also so aus:

Phasenlinie von (2)



⊙ = Ruhelage.

(ii) An der Phasenlinie erkennt man (unter Beachtung der einschlägigen Sätze der Vorlesung) sofort: Die Ruhelage -2 ist stabil. Die Ruhelagen 0 und 2 sind instabil.

(iii) $\lim_{x\to\infty}\varphi(x) = 0$ und $\lim_{x\to-\infty}\varphi(x) = 2$, wie man an der Phasenlinie (unter Beachtung der einschlägigen Sätze der Vorlesung) unschwer erkennt.

(b) (i) $Df(y_1, y_2) = \begin{pmatrix} 2 & -e^{y_2} \\ 7\cos(y_1) & 1 \end{pmatrix}$. Es folgt $A := Df(0,0) = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 7 & 1 \end{pmatrix}$. Das charakteristische Polynom von A ist $P(T) = T^2 - 3T + 9$.

(ii) Das Spektrum von A ist $\mathbb{S} = \{\frac{3}{2} \pm \frac{1}{2}\sqrt{27}\cdot i\}$. Der grösste vorkommende Realteil eines Eigenwertes von A ist also $M = \frac{3}{2}$. Weil M positiv ist, folgt mit dem Stabilitätssatz (Linearisierungsmethode!), dass die Ruhelage $\vec{0}$ instabil ist.

Aufgabe 4. (4+3+4=11 Punkte)

a) Finden Sie die Lösung $u : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R},\ (x,t) \mapsto u(x,t)$ der partiellen Differentialgleichung

$$\left.\begin{array}{l} \partial_t\partial_t u(x,t) = \partial_x\partial_x u(x,t) \\ u(x,0) = 3x^2, \partial_t u(x,0) = 5x \ \forall x \in \mathbb{R} \end{array}\right\} (\mathscr{D})$$

(Hinweis: Man benutze die Formel von d'Alembert für die 1-dimensionale Wellengleichung.)

b) Wir betrachten die Wärmeleitungsgleichung für einen Stab der Länge $\ell = \pi$:

$$\left.\begin{array}{l} \partial_t u(x,t) = 4\partial_x\partial_x u(x,t) \\ u(0,t) = u(\pi,t) = 0 \ \forall t \geq 0 \\ u(x,0) = 7\sin(x) + 2\sin(3x) \ \forall x \in [0,\pi] \end{array}\right\} (\mathscr{P})$$

Finden Sie die Lösung $u : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, (x,t) \mapsto u(x,t)$ von $(\mathscr{P})$ mit der Fourier-Methode.

c) Finden Sie die Lösung $u : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R},\ (x,y) \mapsto u(x,y)$ von der linearen partiellen Differentialgleichung

$$\left.\begin{array}{l} 2\partial_x u(x,y) - 7\partial_y u(x,y) = 0 \\ u(x,-x) = \ln(1+x^2) \ \forall x \in \mathbb{R} \end{array}\right\} (\mathscr{L})$$

(Hinweis: Berechnen Sie zunächst die Charakeristiken, d.h. die Höhenlinien der Lösung u.)

Lösung zu Aufgabe 4.

a) Es handelt sich um eine Wellengleichung mit $c = 1$. Sei $f(x) := 3x^2$ die Anfangsauslenkung und $g(x) = 5x$ die Anfangsgeschwindigkeit. Nach der d'Alembert-Formel ist die Lösung durch

$$\begin{array}{rcl} u(x,t) & = & \frac{1}{2}(f(x+ct) + f(x-ct)) + \frac{1}{2c}\int_{x-ct}^{x+ct} g(s)ds = \\ & = & \frac{1}{2}(3(x+t)^2 + 3(x-t)^2) + \frac{1}{2}\int_{x-t}^{x+t} 5sds = \\ & = & \frac{1}{2}(3(x+t)^2 + 3(x-t)^2 + [\frac{5}{2}s^2]_{x-t}^{x+t} = \\ & = & \frac{1}{2}(3(x+t)^2 + 3(x-t)^2 + \frac{5}{2}(x+t)^2 - \frac{5}{2}(x-t)^2) = \\ & = & \frac{11}{4}(x+t)^2 + \frac{1}{4}(x-t)^2 \end{array}$$

gegeben.

b) Es handelt sich um eine Wärmeleitungsgleichung mit $c = 2$. Nach Vorlesung hat die Lösung von dem Problem $(\mathscr{P})$ die Form

$$\begin{array}{rcl} u(x,t) & = & \sum_{n=1}^{\infty} C_n \sin(\frac{n\pi}{\ell}x)\exp(-(c\frac{n\pi}{\ell})^2 t) = \\ & = & \sum_{n=1}^{\infty} C_n \sin(nx)\exp(-4n^2 t), \end{array}$$

und es gilt

$$u(x,0) = \sum_{n=1}^{\infty} C_n \sin(nx).$$

Man muss nur die Koeffizienten C_n aus der Anfangsbedingung ermitteln. Man kommt durch Koeffizientenvergleich auf $C_1 = 7, C_3 = 2$ und $C_n = 0 \forall n \in \mathbb{N} \setminus \{1,3\}$. Also gilt

$$u(x,t) = 7\sin(x)\exp(-4t) + 2\sin(3x)\exp(-36t).$$

c) Die erste Bedingung läuft auf $\langle \nabla u(x,y), (2,-7)\rangle = 0$ hinaus. Die Höhenlinien von u sind also genau die Geraden mit Richtungsvektor $(2,-7)$, d.h. mit Normalenvektor $(7,2)$. Somit sind die Geraden der Form

$$7x + 2y = c$$

genau die Höhenlinien von u. Es muss also eine differenzierbare Funktion f derart geben, dass $u(x,y) = f(7x+2y)$ für alle x,y gilt. Nun ist

$$u(x,-x) = f(5x) \stackrel{!}{=} \ln(1+x^2),$$

und das erzwingt $f(x) = \ln(1+\frac{1}{25}x^2)$. Insgesamt folgt

$$u(x,y) = \ln(1+\frac{1}{25}(7x+2y)^2).$$