Diskrete Strukturen I, Klausur

Name	Vorname	Matrikelnummer

Aufgabe	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	$\sum$
Punkte											

Bitte schreiben Sie auf jeden Zettel, den Sie abgeben, deutlich Ihren Namen. Bei Multiple-Choice-Aufgaben ergibt jedes korrekte, falsche bzw. nicht angekreuzte Kästchen $+1/2$, $-1/2$ bzw. 0 Punkte.

Aufgabe 1: *(5 Punkte)* Es seien M und N Mengen sowie $f : M \to N$ eine Abbildung. Zeigen Sie, dass f genau dann bijektiv ist, wenn es eine Abbildung $g : N \to M$ gibt, so dass $g \circ f$ und $f \circ g$ Identitätsabbildungen von M bzw. N sind.

Aufgabe 2: *(5 Punkte)*
Zeigen Sie mit Induktion, dass für alle Mengen $A_1, \ldots, A_n$ und B gilt:

$$(A_1 \cap \ldots \cap A_n) \cup B = (A_1 \cup B) \cap \ldots \cap (A_n \cup B).$$

(Tipp: Aus der Vorlesung ist bekannt: $(A \cap B) \cup C = (A \cup C) \cap (B \cup C)$.)

Aufgabe 3: *(5 Punkte)*
Zeigen Sie, dass für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt:

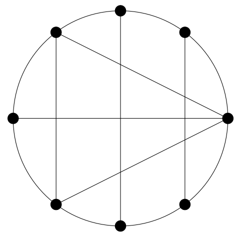
$$\sum_{k=1}^{n}(2k-1) = n^2.$$

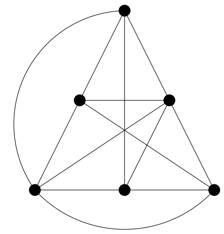
Aufgabe 4: *(5 Punkte, minimal 0 Punkte)*

	Wahr	Falsch
Das Produkt von zwei Primzahlen ist eine Primzahl.		
Ist M eine Menge mit n Elementen, so gibt es n^n bijektive Abbildungen von M nach M.		
Eine Menge mit 7 Elementen hat genauso viele dreielementige wie vierelementige Teilmengen.		
Die Ableitung einer erzeugenden Funktion A ist invertierbar. Dann ist auch A invertierbar.		
Für Aussagen A und B gilt: $(A \Rightarrow B) \Leftrightarrow (A \wedge B)$.		
Sei M die leere Menge. Dann besitzt die Potenzmenge von M genau ein Element.		
Sei $f(n) = n\log(n)$. Dann gilt $f(n) = O(n^{1,001})$.		
Für $k, n \in \mathbb{N}$ mit $n > k$ gilt: $\binom{n+1}{k} = \binom{n}{k-1} + \binom{n}{k}$.		
Es sei G ein Graph, in dem es für je zwei Ecken v_1, v_2 einen Weg von v_1 nach v_2 gibt. Dann ist G ein Baum.		
Die erzeugende Funktion $\sum_{n\geq 0} nx^n$ ist invertierbar.		

Aufgabe 5: *(4 Punkte)*
In einem typischen Dominospiel gibt es Steine mit Zahlen auf zwei Seiten. Diese Zahlen nehmen Werte zwischen 0 und 6 an (einschließlich). Bestimmen Sie die Anzahl der verschiedenen Steine.

Aufgabe 6: *(4 Punkte)*





Entscheiden Sie (mit Beweis), ob die dargestellten Graphen plättbar sind.

Aufgabe 7: *(6 Punkte)*
Entscheiden Sie jeweils für die beiden Graphen aus Aufgabe 6, ob es einen geschlossenen Euler–Weg gibt. Falls es keinen gibt, so entscheiden Sie, ob es einen nicht geschlossenen Euler–Weg gibt, d.h. einen Weg, der jede Kante genau einmal benutzt.

Aufgabe 8: *(6 Punkte)*
Geben Sie eine explizite Formel für die durch folgende Rekursionsgleichung definierte Folge an:

$$a_0 = 1, a_1 = 2, a_2 = 3, a_n = 3a_{n-2} - 2a_{n-3} \text{ für } n \geq 3.$$

Aufgabe 9: *(6 Punkte)*
Geben Sie eine explizite Formel für die durch folgende Rekursionsgleichung definierte Folge an:

$$a_0 = 1, a_n = a_{n-1} + 5^n \text{ für } n \geq 1.$$

Aufgabe 10: *(8 Punkte)*
Gegeben sei die folgende Optimierungsaufgabe: Maximiere die Funktion $x_1 + x_2$ unter den Nebenbedingungen

$$\begin{aligned} x_2 &\leq 6 - \frac{1}{3}x_1 \\ x_2 &\leq 30 - 3\,x_1 \\ x_2 &\leq 5 - \frac{1}{6}x_1, \end{aligned}$$
$$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0.$$

(a) Lösen Sie die Optimierungsaufgabe graphisch.

(b) Bringen Sie die Optimierungsaufgabe auf Normalform.

(c) Stellen Sie das Simplex-Tableau auf.

(d) Bestimmen Sie das Maximum mit dem Simplex–Algorithmus.