KLAUSUR

Diskrete Strukturen I

28. 7. 2003 9:00 - 11:00

Prof. Dr. Gunter Malle

Dr. Andreas Klein

Name:	Vorname:	Matr.–Nr.:

Bitte lassen Sie genügend Platz zwischen den Aufgaben und beschreiben Sie nur die Vorderseite der Blätter!

Zum Bestehen der Klausur müssen 14 Punkte erreicht werden.

1)	2)	3)	4a)	4b)

Punkte:	Note:

Die Aufgaben 4a und 4b sind Wahlaufgaben. Sie müssen nur eine dieser Aufgaben bearbeiten. Wenn Sie beide Aufgaben bearbeiten, wird nur die bessere gewertet.

Aufgabe 1 (8 Punkte)

Die SCHLAF-Sprache besteht aus den 720 Buchstabenfolgen, die durch alle Permutationen der 6 Buchstaben des Wortes SCHLAF gebildet werden.

(i) An welcher Stelle steht das Wort SCHLAF im Duden der SCHLAF-Sprache?

(ii) Welches Wort steht an der 257-ten Stelle?

Aufgabe 2 (8 Punkte)

Die Folge a_n wird durch $a_0 = \sqrt{2}$ und

$$a_{n+1} = \sqrt{2 + a_n} \quad \text{für } n \geq 0$$

definiert.
Beweisen Sie (mit vollständiger Induktion):

(i) Die Folge a_n ist durch 2 nach oben beschränkt.

(ii) Die Folge a_n ist streng monoton steigend.

Aufgabe 3 (8 Punkte)

Geben Sie eine explizite Formel für die durch folgende Rekursionsgleichung definierte Folge an:

$$a_n = 5a_{n-1} - 6a_{n-2} \quad \text{für } n \geq 2$$

und $a_0 = 0$, $a_1 = 1$.

Aufgabe 4a: (6 Punkte)
Wir definieren die Funktionen $f, g : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ durch:

$$f(n) = \begin{cases} n^2 & \text{falls } n \text{ Primzahl} \\ n^3 & \text{sonst} \end{cases} \qquad g(n) = \begin{cases} n^2 & \text{falls } n \text{ ungerade} \\ n^3 & \text{sonst} \end{cases}$$

Welche der folgenden Aussagen sind wahr? Begründen Sie ihre Antwort!

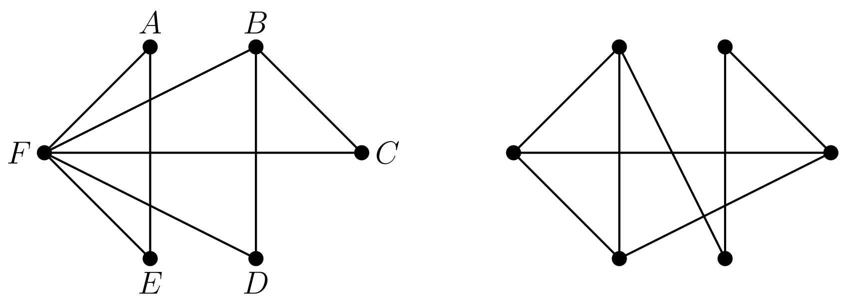
(i) $f(n) = \Omega(n^2)$

(ii) $g(n) = O(n^2)$

(iii) $f(n) = O(g(n))$

(iv) $g(n) = O(f(n))$

Aufgabe 4b: (6 Punkte)



(i) Entscheiden Sie für die beiden oben abgebildeten Graphen, ob Sie einen Hamilton-Kreis besitzen. (Begründung nicht vergessen!)

(ii) Bestimmen Sie für den Graphen auf der linken Seite die Adjazenzmatrix.

(iii) Bestimmen Sie für den Graphen auf der linken Seite die Anzahl der Wege der Länge 3, die von A nach B führen.

Lösung Aufgabe 1

(i) Es gibt $5 \cdot 5!$ Wörter, die mit A,C,F,H oder L beginnen. Diese Wörter stehen alle vor dem Wort Schlaf.

$4!$ Wörter beginnen mit SA.

$2 \cdot 3!$ Wörter mit SCA oder SCF.

$2 \cdot 2!$ Wörter mit SCHA oder SCHF.

Also stehen $5 \cdot 5! + 4! + 2 \cdot 3! + 2 \cdot 2! = 640$ Wörter im Alphabet vor SCHLAF.

Das Wort SCHLAF steht daher an der 641-ten Stelle im Duden der SCHLAF-Sprache.

(ii) $257 = 2 \cdot 5! + 0 \cdot 4! + 3! \cdot 3! + 0 \cdot 2! + 1 \cdot 1!$

Daher muß das 257-te Wort mit F beginnen (dritter Buchstabe in A,C,F,H,L,S). Der zweite Buchstabe muß A sein, usw.

Man erhält, daß das Wort an der 257 Stelle lautet:

FALSCH

Lösung Aufgabe 2

(i) **Induktionsanfang:** $a_0 = \sqrt{2} < 2$

Induktionsvoraussetzung: $a_{n-1} < 2$

Induktionsbehauptung: $a_n < 2$

Induktionsschritt: $a_n = \sqrt{2 + a_{n-1}} < \sqrt{2+2} = 2$

(ii) **Induktionsanfang:** $a_0 = \sqrt{2+0} < \sqrt{2+\sqrt{2}} = a_1$

Induktionsvoraussetzung: $a_{n-1} < a_n$

Induktionsbehauptung: $a_n < a_{n+1}$

Induktionsschritt: $a_{n+1} = \sqrt{2 + a_n} > \sqrt{2 + a_{n-1}} = a_n$

Lösung Aufgabe 3

Sei $A(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ die erzeugende Funktion der Folge a_n.
$A(x)$ erfüllt die Gleichung $A(x) = 5xA(x) - 6x^2 A(x) + x$, d.h.

$$A(x) = \frac{x}{1 - 5x + 6x^2} .$$

Partialbruchzerlegung liefert:

$$A(x) = \frac{-1}{1-2x} + \frac{1}{1-3x} .$$

Also gilt

$$a_n = -2^n + 3^n .$$

Lösung Aufgabe 4a

(i) Wahr, denn $f(n) \geq n^2$ für alle n.

(ii) Falsch, denn es gibt kein c, so daß für fast alle geraden Zahlen n die Ungleichung $n^3 \leq cn^2$ erfüllt ist.

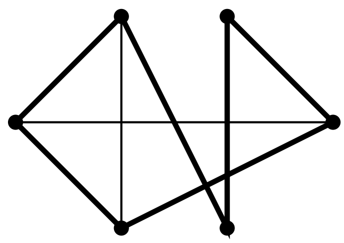
(iii) Falsch, denn diese Aussage ist äquivalent zu: Fast alle ungeraden Zahlen sind Primzahlen.

(iv) Wahr, denn die Aussage ist äquivalent zu: Fast alle Primzahlen sind ungerade. (2 ist die einzige gerade Primzahl.)

Lösung Aufgabe 4b

(i) Die Ecken A und E des linken Graphen haben jeweils den Grad 2, d.h. in einem Hamilton-Kreis müß ten die Kanten AE, AF und EF enthalten sein. Dies ist jedoch nicht möglich, da der Kantenzug $FAEF$ nicht Teil eines Hamilton-Kreises sein kann. Der linke Graph besitzt also keinen Hamilton-Kreis.

Der rechte Graph besitzt den folgenden Hamilton-Kreis.



(ii) Die Adjazenzmatrix lautet:

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

(iii) Wir berechnen M^3 und sehen, daß es 3 Wege der Länge 3 von A nach B gibt.