NACHHOLKLAUSUR

Diskrete Strukturen II
Wintersemester 2006/2007

10. 9. 2007

(R. Küstner)

Name:	Vorname:	Matrikelnummer:

Bitte schreiben Sie auf jedes Ihrer Blätter an den oberen Rand Ihren Namen und Vornamen sowie auch Ihre Matrikelnummer.

Bitte denken Sie daran, Ihre Antworten zu begründen und daß Sie mit Ihren Ergebnissen auch stets eine Probe machen sollten.

Zum Bestehen der Klausur sollten 40 Punkte erreicht werden.

Bitte schreiben Sie so, daß man Ihre Schrift auch lesen kann!

1.a)	1.b)	2.	3.	4.	5.a)	5.b)	6.	7.	8.

Punkte:	Note:

Nachholklausur (10. 9. 2007)

1. Aufgabe (4+5 Punkte)
   a) Zeigen Sie: Für alle $a \in \mathbb{Z}$ gilt $a^2 \not\equiv 5 \bmod 6$.
   b) Zeigen Sie: Für alle $a \in \mathbb{Z}$ gilt $6 \,|\, (a^3 + 17a)$.

2. Aufgabe (9 Punkte)
   Berechnen Sie $\mathrm{ggT}(7884, 6615)$ sowie $x, y \in \mathbb{Z}$ mit $\mathrm{ggT}(7884, 6615) = x \cdot 7884 + y \cdot 6615$.

3. Aufgabe (10 Punkte)
   Berechnen Sie $\mathrm{ggT}(1764, 1092)$ mit Hilfe des binären euklidischen Algorithmus.

4. Aufgabe (9 Punkte)
   Untersuchen Sie, ob die lineare diophantische Gleichung $161x + 259y = 119$ in $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ lösbar ist, und bestimmen Sie die Lösungsmenge.

5. Aufgabe (10+14 Punkte)
   Bestimmen Sie für die folgenden beiden Kongruenzsysteme jeweils in $\mathbb{Z}$ die gemeinsame Lösungsmenge:
   a) $3x \equiv 17 \bmod 37, \quad x \equiv 38 \bmod 53$
   b) $3x \equiv 2 \bmod 7, \quad x \equiv 5 \bmod 13, \quad 14x \equiv 6 \bmod 22$

6. Aufgabe (5 Punkte)
   Untersuchen Sie, ob die Zahl 44 ein primer Rest modulo 117 ist. Falls ja, so berechnen Sie den zugehörigen inversen primen Rest.

7. Aufgabe (1+7+6 Punkte)
   a) Gibt es einen Graph mit sieben Knoten, die die Grade 0, 1, 2, 3, 4, 5 bzw. 6 haben?
   b) Wie viele Knoten und wie viele Kanten hat ein 4-regulärer, zusammenhängender, plättbarer Graph mindestens? Geben Sie ein Beispiel eines solchen Graphen mit möglichst wenig Knoten und Kanten.
   c) Zeigen Sie: Jeder zusammenhängende, plättbare Graph mit mindestens drei Knoten hat mindestens drei Knoten, deren Grade nicht größer als 5 sind.

8. Aufgabe (20 Punkte)
   Gegeben sei der Graph $G = (V, E)$ mit der Knotenmenge $V = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$ und der Kantenmenge $E = \big\{\{a, b\} : a, b \in V, a \neq b, a \equiv b \bmod p$ für mindestens eine Primzahl $p\big\}$.
   a) Geben Sie die Kantenmenge E explizit an (d.h. zählen Sie die Elemente von E auf).
   b) Welche Grade haben die sieben Knoten von G jeweils?
   c) Geben Sie die Adjazenzmatrix von G an.
   d) Zeichnen Sie G mit möglichst wenig Kantenüberschneidungen.
   e) Ist G zusammenhängend? Welchen Durchmesser hat G?
   f) Ist G plättbar?
   g) Ist G eulersch?
   h) Ist G hamiltonsch?

Musterlösung zur Nachholklausur (10. 9. 2007)

1. Aufgabe (4+5 Punkte)

a) Zeigen Sie: Für alle $a \in \mathbb{Z}$ gilt $a^2 \not\equiv 5 \bmod 6$.

Da aus $a \equiv b \bmod 6$ auch $a^2 \equiv b^2 \bmod 6$ folgt, genügt es $a^2 \not\equiv 5 \bmod 6$ für die sechs Reste $a \in \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$ zu zeigen: $0^2 = 0 \not\equiv 5 \bmod 6$, $1^2 = 1 \not\equiv 5 \bmod 6$, $2^2 = 4 \not\equiv 5 \bmod 6$, $3^2 = 9 \equiv 3 \not\equiv 5 \bmod 6$, $4^2 = 16 \equiv 4 \not\equiv 5 \bmod 6$, $5^2 = 25 \equiv 1 \not\equiv 5 \bmod 6$.

Oder:

Wir nehmen an, es gelte $a^2 \equiv 5 \bmod 6$ für ein $a \in \mathbb{Z}$, d.h. $a^2 = 6k+5$ mit $k \in \mathbb{Z}$. Dann ist insbesondere a^2 eine ungerade Zahl und demzufolge auch a selbst ungerade (denn wenn a gerade wäre, so wäre auch a^2 gerade, ja sogar durch 4 teilbar), d.h. $a = 2l+1$ mit $l \in \mathbb{Z}$. Hieraus folgt $4\big(l(l+1) - 1\big) = (2l+1)^2 - 5 = a^2 - 5 = 6k$ und folglich ist $l(l+1)-1$ durch 3 teilbar, d.h. $l(l+1) = 3m+1$ mit $m \in \mathbb{Z}$. Dann kann aber weder l noch $l+1$ durch 3 teilbar sein und somit muß $l-1$ durch 3 teilbar sein, d.h. $l = 3n+1$ mit $n \in \mathbb{Z}$. Dann folgt aber $9n(n+1) + 2 = (3n+1)(3n+2) = l(l+1) = 3m+1$ und hieraus $1 = 3\big(m - 3n(n+1)\big)$, ein Widerspruch, da ja auch $m - 3n(n+1) \in \mathbb{Z}$.

b) Zeigen Sie: Für alle $a \in \mathbb{Z}$ gilt $6 \,|\, (a^3 + 17a)$.

Es gilt $a^3+17a = a(a^2-1)+18a = (a-1)a(a+1)+6\cdot 3a$ und unter drei aufeinander folgenden ganzen Zahlen $a-1$, a und $a+1$ gibt es stets genau eine Zahl, die durch 3 teilbar ist, und auch immer mindestens eine Zahl, die durch 2 teilbar ist. Folglich gilt immer $6 = 2\cdot 3 \,|\, (a-1)a(a+1)$ und somit auch stets $6 \,|\, (a^3+17a)$ für alle $a \in \mathbb{Z}$.

Oder:

Wegen $(-a)^3 + 17(-a) = -(a^3 + 17a)$ genügt es, $6 \,|\, (n^3 + 17n)$ für alle ganzen Zahlen $n \geq 0$ zu zeigen. Wir zeigen dies per vollständiger Induktion: Für $n = 0$ haben wir als Induktionsanfang, daß $6 \,|\, 0 = 0^3 + 17 \cdot 0$ gilt. Wir machen die Induktionsvoraussetzung, daß für eine feste ganze Zahl $n \geq 0$ die Teilbarkeitsbeziehung $6 \,|\, (n^3 + 17n)$ gelte. Hieraus folgt, aufgrund der Beziehung $(n+1)^3 + 17(n+1) = n^3+3n^2+3n+1+17n+17 = n^3+17n+3n(n+1)+18$ und der Tatsache, daß stets entweder n oder $n+1$ durch 2 teilbar ist und folglich auch immer $3n(n+1) + 18$ durch 6 teilbar ist, dann, daß auch $6 \,|\, \big((n+1)^3 + 17(n+1)\big)$ gilt.

2. Aufgabe (9 Punkte)

Berechnen Sie $\mathrm{ggT}(7884, 6615)$ sowie $x, y \in \mathbb{Z}$ mit $\mathrm{ggT}(7884, 6615) = x \cdot 7884 + y \cdot 6615$.

Der erweiterte euklidische Algorithmus liefert $\mathrm{ggT}(7884, 6615) = 27 = 73 \cdot 7884 - 87 \cdot 6615$.

k	$c_k a_k$	a_k	c_k	z_k	x_k	y_k
0		7884		**−87**	1	0
1	6615	6615	1	**73**	0	1
2	6345	1269	5	−14	1	−1
3	1080	270	4	3	−5	6
4	189	189	1	−2	21	−25
5	162	81	2	1	−26	31
6	81	**27**	3	0	**73**	**−87**
7		0				

$a_0 := 7884 > a_1 := 6615 > 0$ und dann $a_{k-1} = c_k a_k + a_{k+1}$ mit $c_k, a_{k+1} \in \mathbb{N}$, wobei $0 \leq a_{k+1} < a_k$, für $k = 1, 2, 3, 4, 5, 6$, stopp bei $a_7 = 0$, dann $\mathrm{ggT}(a_0, a_1) = a_6$

$z_6 := 0$, $z_5 := 1$ und $z_{k-1} := z_{k+1} - c_k z_k$ für $k = 5, 4, 3, 2, 1$, dann $x = z_1$, $y = z_0$

$x_0 := 1$, $x_1 := 0$, $y_0 := 0$, $y_1 := 1$ und $x_{k+1} := x_{k-1} - c_k x_k$, $y_{k+1} := y_{k-1} - c_k y_k$ für $k = 1, 2, 3, 4, 5$, dann $x = x_6$, $y = y_6$

Zur Verifikation der Ergebnisse kann man nachrechnen, daß $7884/27 = 292 = 2^2 \cdot 73$ und $6615/27 = 245 = 5 \cdot 7^2$ sowie $73 \cdot 7884 = 575532$ und $87 \cdot 6615 = 575505$ gelten.

3. Aufgabe (10 Punkte)
   Berechnen Sie $\mathrm{ggT}(1764, 1092)$ mit Hilfe des binären euklidischen Algorithmus.

   Zuerst berechnet man die Binärdarstellungen der beiden Zahlen 1764 und 1092: Es gilt $1764 = 1024 + 512 + 128 + 64 + 32 + 4 = 2^{10} + 2^9 + 2^7 + 2^6 + 2^5 + 2^2 \mathrel{\hat{=}} 11011100\underline{\underline{00}}$ und $1092 = 1024 + 64 + 4 = 2^{10} + 2^6 + 2^2 \mathrel{\hat{=}} 10001000\underline{\underline{00}}$. Die beiden doppelt unterstrichenen Nullen repräsentieren einen gemeinsamen Faktor 4. Man rechnet nun

$$\begin{array}{r} 110111001 \\ -100010001 \\ \hline 10101\underline{000} \end{array} \qquad \begin{array}{r} 100010001 \\ -10101 \\ \hline 111111\underline{00} \end{array} \qquad \begin{array}{r} 111111 \\ -10101 \\ \hline 10101\underline{0} \end{array} \qquad \begin{array}{r} 10101 \\ -\mathbf{10101} \\ \hline 0 \end{array}$$

   und erhält $\mathrm{ggT}(1764/4, 1092/4) = 21 \mathrel{\hat{=}} 10101$ und so $\mathrm{ggT}(1764, 1092) = 84 \mathrel{\hat{=}} 10101\underline{\underline{00}}$.

   Zur Verifikation des Ergebnisses kann man nachrechnen, daß $1764/84 = 21 = 3 \cdot 7$ und $1092/84 = 13$ gelten.

4. Aufgabe (9 Punkte)
   Untersuchen Sie, ob die lineare diophantische Gleichung $161x + 259y = 119$ in $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ lösbar ist, und bestimmen Sie die Lösungsmenge.

   Diese Gleichung ist genau dann in $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ lösbar, wenn 119 durch $\mathrm{ggT}(161, 259)$ teilbar ist. Mit Hilfe des erweiterten euklidischen Algorithmus berechnet man $\mathrm{ggT}(161, 259) = 7 = -8 \cdot 161 + 5 \cdot 259$. Da $7 \mid 119 = 17 \cdot 7$ gilt, ist die Gleichung also in $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ lösbar, und da $161 = 23 \cdot 7$ sowie $259 = 37 \cdot 7$ gelten, ist die Gleichung äquivalent zu der Gleichung $23x + 37y = 17$, bei welcher nun $\mathrm{ggT}(23, 37) = 1 = -8 \cdot 23 + 5 \cdot 37$ gilt. Hieraus ergibt sich, daß ein Paar $(x, y) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ genau dann eine Lösung der Gleichung ist, wenn es ein $k \in \mathbb{Z}$ mit $x = -8 \cdot 17 - 37k = -136 - 37k$ sowie $y = 5 \cdot 17 + 23k = 85 + 23k$ gibt. Wenn man hierbei k in der Form $k = -l - 4$ mit $l \in Z$ schreibt, so findet man, daß sich die Lösungsmenge auch noch in der Form $\{(12 + 37l, -7 - 23l) : l \in Z\}$ darstellen läßt.

5. Aufgabe (10+14 Punkte)
   Bestimmen Sie für die folgenden beiden Kongruenzsysteme jeweils in $\mathbb{Z}$ die gemeinsame Lösungsmenge:

   a) $3x \equiv 17 \bmod 37, \quad x \equiv 38 \bmod 53$

      Mit etwas Überlegen oder mit Hilfe des erweiterten euklidischen Algorithmus findet man, daß $\mathrm{ggT}(37, 3) = 1 = 1 \cdot 37 - 12 \cdot 3 = 25 \cdot 3 - 2 \cdot 37$, also auch $25 \cdot 3 \equiv 1 \bmod 37$, und daß $25 \cdot 17 = 425 = 11 \cdot 37 + 18 \equiv 18 \bmod 37$. Daher ist die Kongruenz $3x \equiv 17 \bmod 37$ äquivalent zu $x \equiv 18 \bmod 37$. Da 53 und 37 Primzahlen sind, gilt $\mathrm{ggT}(53, 37) = 1$ sowie $\mathrm{kgV}(53, 37) = 53 \cdot 37 = 1961$ und demzufolge sind die beiden Kongruenzen gemeinsam in $\mathbb{Z}$ lösbar, wobei die gemeinsame Lösung modulo 1961 eindeutig ist. Mit Hilfe des erweiterten euklidischen Algorithmus findet man $1 = 7 \cdot 53 - 10 \cdot 37$, hiermit gemäß dem Chinesischen Restsatz dann die spezielle gemeinsame Lösung $x_0 := 18 \cdot 7 \cdot 53 - 38 \cdot 10 \cdot 37 = 18 - 20 \cdot 10 \cdot 37 = 18 - 200 \cdot 37 = 18 + 12 \cdot 37 - 4 \cdot 53 \cdot 37 = 462 + 4 \cdot 1961 \equiv 462 \bmod 1961$ und somit die Restklasse $[462]_{1961} = \{462 + 1961k : k \in \mathbb{Z}\}$ als gemeinsame Lösungsmenge.

      Zur Verifikation des Ergebnisses kann man nachrechnen, daß $462 - 38 = 424 = 8 \cdot 53$ sowie $462 - 18 = 444 = 12 \cdot 37$ und folglich auch $3 \cdot 462 - 17 = 3(18 + 12 \cdot 37) - 17 = 54 - 17 + 36 \cdot 37 = 37 \cdot 37$ gelten.

b) $3x \equiv 2 \bmod 7$, $x \equiv 5 \bmod 13$, $14x \equiv 6 \bmod 22$

Die Kongruenz $3x \equiv 2 \bmod 7$ ist wegen $5 \cdot 3 = 15 \equiv 1 \bmod 7$ sowie $5 \cdot 2 = 10 \equiv 3 \bmod 7$ äquivalent zu der Kongruenz $x \equiv 3 \bmod 7$. Die Kongruenz $14x \equiv 6 \bmod 22$ ist natürlich äquivalent zu $7x \equiv 3 \bmod 11$ und somit wegen $8 \cdot 7 = 56 \equiv 1 \bmod 11$ sowie $8 \cdot 3 = 24 \equiv 2 \bmod 11$ auch äquivalent zu der Kongruenz $x \equiv 2 \bmod 11$. Zu bestimmen ist somit also die gemeinsame Lösungsmenge der drei Kongruenzen $x \equiv 3 \bmod 7$, $x \equiv 2 \bmod 11$ und $x \equiv 5 \bmod 13$.

Die drei Primzahlen 7, 11 und 13 sind natürlich paarweise teilerfremd und folglich sind die drei Kongruenzen gemeinsam in $\mathbb{Z}$ lösbar, wobei die gemeinsame Lösung modulo 1001 eindeutig ist, da ja $7 \cdot 11 \cdot 13 = 11 \cdot 91 = 1001$.

Mit Hilfe des erweiterten euklidischen Algorithmus findet man $\mathrm{ggT}(7, 11 \cdot 13) = 1 = 41 \cdot 7 - 2 \cdot 143$ und $\mathrm{ggT}(11, 7 \cdot 13) = 1 = -33 \cdot 11 + 4 \cdot 91$ und $\mathrm{ggT}(13, 7 \cdot 11) = 1 = 6 \cdot 13 - 1 \cdot 77$, hiermit gemäß dem Chinesischen Restsatz dann die spezielle gemeinsame Lösung $x_0 := 3 \cdot (-2) \cdot 143 + 2 \cdot 4 \cdot 91 + 5 \cdot (-1) \cdot 77 = -858 + 728 - 385 = -130 - 385 = -515 \equiv 486 \bmod 1001$ für die drei Kongruenzen und demzufolge die Restklasse $[486]_{1001} = \{486 + 1001k : k \in \mathbb{Z}\}$ als gemeinsame Lösungsmenge für die drei Kongruenzen.

Zur Verifikation des Ergebnisses kann man nachrechnen, daß $486 - 3 = 483 = 69 \cdot 7$ und $486 - 2 = 484 = 44 \cdot 11$ sowie $486 - 5 = 481 = 37 \cdot 13$ und desweiteren auch noch $3 \cdot 486 - 2 = 1456 = 208 \cdot 7$ sowie $14 \cdot 486 - 6 = 6798 = 309 \cdot 22$ gelten.

6. Aufgabe (5 Punkte)

Untersuchen Sie, ob die Zahl 44 ein primer Rest modulo 117 ist. Falls ja, so berechnen Sie den zugehörigen inversen primen Rest.

Die Zahl 44 ist genau dann ein primer Rest modulo 117, wenn sie modulo 117 multiplikativ invertierbar ist, d.h. wenn die Kongruenz $44x \equiv 1 \bmod 117$ in $\mathbb{Z}$ lösbar ist, d.h. wenn $\mathrm{ggT}(44, 117) = 1$ gilt, d.h. wenn 44 und 117 teilerfremd sind.
Mit Hilfe des erweiterten euklidischen Algorithmus berechnet man $\mathrm{ggT}(44, 117) = 1 = 8 \cdot 44 - 3 \cdot 117$. Demzufolge ist 44 ein primer Rest modulo 117 und der zugehörige inverse prime Rest ist die Zahl 8.
Oder:
Es gilt $117 = 9 \cdot 13 = 3^2 13$ und folglich $\varphi(117) = 3 \cdot 2 \cdot 12 = 72$. Falls 44 ein primer Rest modulo 117 ist, dann gilt gemäß dem Satz von Euler $44^{72} \equiv 1 \bmod 117$ und dann ist der Rest $x_0 \in \{0, 1, 2, 3, \ldots, 116\}$ mit $44^{71} \equiv x_0 \bmod 117$ der inverse prime Rest zu 44. Man kann nun diesen Rest x_0 berechnen und prüfen, ob er tatsächlich die Kongruenz $44x \equiv 1 \bmod 117$ erfüllt. Falls ja, so ist 44 tatsächlich ein primer Rest modulo 117 und x_0 der zugehörige inverse prime Rest. Falls nein, so ist 44 kein primer Rest modulo 117.
Zur Berechnung von x_0 schreibt man $71 = 64 + 4 + 2 + 1$ und berechnet durch fortlaufendes modulares Quadrieren der Reihe nach modulo 117 die Potenzen 44^1, 44^2, 44^4, 44^8, 44^{16}, 44^{32}, 44^{64}, und anschließend modulo 117 das Produkt $44^{71} = 44^{64} 44^4 44^2 44^1$. Man berechnet also zuerst $44^2 = (4 \cdot 11)^2 = 16 \cdot 121 = 16 \cdot 117 + 64 \equiv 64 \bmod 117$ und dann $44^4 = (44^2)^2 \equiv 64^2 = 128 \cdot 32 \equiv 11 \cdot 32 = 352 \equiv 1 \bmod 117$. Hieraus folgt bereits, daß $x_1 := 44^3$ eine Lösung für $44x \equiv 1 \bmod 117$ und somit 44 ein primer Rest modulo 117 ist. Desweiteren gilt $x_1 = 44^3 = 44^2 44 \equiv 64 \cdot 44 = 128 \cdot 22 \equiv 11 \cdot 22 = 242 \equiv 8 \bmod 117$, so daß die Zahl 8 der inverse prime Rest zu 44 ist.

Zur Verifikation des Ergebnisses kann man nachrechnen, daß $44 \cdot 8 = 352 \equiv 1 \bmod 117$ gilt.

7. Aufgabe (1+7+6 Punkte)

a) Gibt es einen Graph mit sieben Knoten, die die Grade 0, 1, 2, 3, 4, 5 bzw. 6 haben?

Es gibt keinen solchen Graph, denn:
Bei einem Graph mit sieben Knoten können nicht gleichzeitig die beiden Grade 0 und 6 vorkommen.
Oder:
Bei einem solchen Graph wäre die Summe der Grade gleich 21, eine ungerade Zahl. Nach dem Handschlaglemma (Satz 2.1) ist dies aber nicht möglich.
Oder:
Bei einem Graph mit mehr als einem Knoten, können nicht alle Knoten verschiedene Grade haben, siehe Übungsaufgabe 12.2.

b) Wie viele Knoten und wie viele Kanten hat ein 4-regulärer, zusammenhängender, plättbarer Graph mindestens? Geben Sie ein Beispiel eines solchen Graphen mit möglichst wenig Knoten und Kanten.

Es sei $G = (V, E)$ ein 4-regulärer, zusammenhängender, plättbarer Graph mit $|V| = n$ und $|E| = m$. Da G 4-regulär ist, haben alle Knoten den Grad 4. Demzufolge muß $n \geq 5$ gelten und aufgrund des Handschlaglemmas (Satz 2.1) gilt auch $4n = \sum_{v \in V} \deg(v) = 2m$, d.h. $2n = m$. Andererseits, da G zusammenhängend und plättbar und $n \geq 5 \geq 3$ ist, gilt gemäß Korollar 2.4 auch $m \leq 3n - 6$. Zusammengenommen folgt dann $2n = m \leq 3n - 6$, d.h. $n \geq 6$, und folglich $m = 2n \geq 12$.

Ein Beispiel eines solchen 4-regulären, zusammenhängenden, plättbaren Graphen mit 6 Knoten und mit 12 Kanten (und somit mit $12+2-6 = 8$ Gebieten, gemäß der Eulerschen Polyederformel) erhält man, indem man ein Viereck zeichnet und noch je einen Knoten im Inneren und im Äußeren des Vierecks, welche man beide jeweils überschneidungsfrei mit den vier Eckknoten des Vierecks verbindet. Es handelt sich hierbei dann um eine ebene Zeichnung eines Oktaeders (d.h. Achtflächners).

c) Zeigen Sie: Jeder zusammenhängende, plättbare Graph mit mindestens drei Knoten hat mindestens drei Knoten, deren Grade nicht größer als 5 sind.

Es sei $G = (V, E)$ ein zusammenhängender, plättbarer Graph mit $|V| = n \geq 3$ und $|E| = m$. Es sei k die Anzahl der Knoten in V, deren Grad nicht größer als 5 ist. Es gilt also $0 \leq k \leq n$ und zu zeigen ist, daß $k \geq 3$ gilt. Da G zusammenhängend ist, haben alle Knoten mindestens Grad 1 und nach Voraussetzung ist bei $n-k$ Knoten der Grad größer als 5. Hieraus folgt zusammen mit dem Handschlaglemma (Satz 2.1), daß $k + 6(n-k) \leq \sum_{v \in V} \deg(v) = 2m$. Andererseits, da G zusammenhängend und plättbar und $n \geq 3$ ist, gilt gemäß Korollar 2.4 auch $m \leq 3n - 6$ und somit $2m \leq 6n - 12$. Zusammengenommen folgt dann $k + 6(n-k) \leq 6n - 12$, d.h. $5k \geq 12$ d.h. $k \geq 3$, da ja k eine ganze Zahl ist.

8. Aufgabe (20 Punkte)

Gegeben sei der Graph $G = (V, E)$ mit der Knotenmenge $V = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$ und der Kantenmenge $E = \big\{\{a, b\} : a, b \in V, a \neq b, a \equiv b \bmod p$ für mindestens eine Primzahl $p\big\}$.

a) Geben Sie die Kantenmenge E explizit an (d.h. zählen Sie die Elemente von E auf).

Es gelten $3-1 = 4-2 = 5-3 = 6-4 = 7-5 = 2$, $4-1 = 5-2 = 6-3 = 7-4 = 3$, $5-1 = 6-2 = 7-3 = 4 = 2{\cdot}2$, $6-1 = 7-2 = 5$ sowie $7-1 = 6 = 2{\cdot}3$ und somit $E = \big\{\{1,3\}, \{1,4\}, \{1,5\}, \{1,6\}, \{1,7\}, \{2,4\}, \{2,5\}, \{2,6\}, \{2,7\}, \{3,5\}, \{3,6\}, \{3,7\}, \{4,6\}, \{4,7\}, \{5,7\}\big\}$.
Der Graph G hat also 15 Kanten, d.h. $|E| = 15$.

b) Welche Grade haben die sieben Knoten von G jeweils?

v	1	2	3	4	5	6	7
$\deg(v)$	5	4	4	4	4	4	5

c) Geben Sie die Adjazenzmatrix von G an.

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

d) Zeichnen Sie G mit möglichst wenig Kantenüberschneidungen.

Der Graph G kann mit einer einzigen Kantenüberschneidung gezeichnet werden, siehe Zeichnung A.

e) Ist G zusammenhängend? Welchen Durchmesser hat G?

Der Graph G ist zusammenhängend und hat Durchmesser 2. Hierzu genügt es zu zeigen, daß es jeweils eine Verbindung der Länge 2 (d.h. via einem Knoten) von 1 nach 2, von 2 nach 3, von 3 nach 4, von 4 nach 5, von 5 nach 6 sowie von 6 nach 7 gibt. Dies ist der Fall, so kann man z.B. via Knoten 6 von 1 nach 2, von 2 nach 3 und von 3 nach 4 sowie via Knoten 2 von 4 nach 5, von 5 nach 6 und von 6 nach 7.

f) Ist G plättbar?

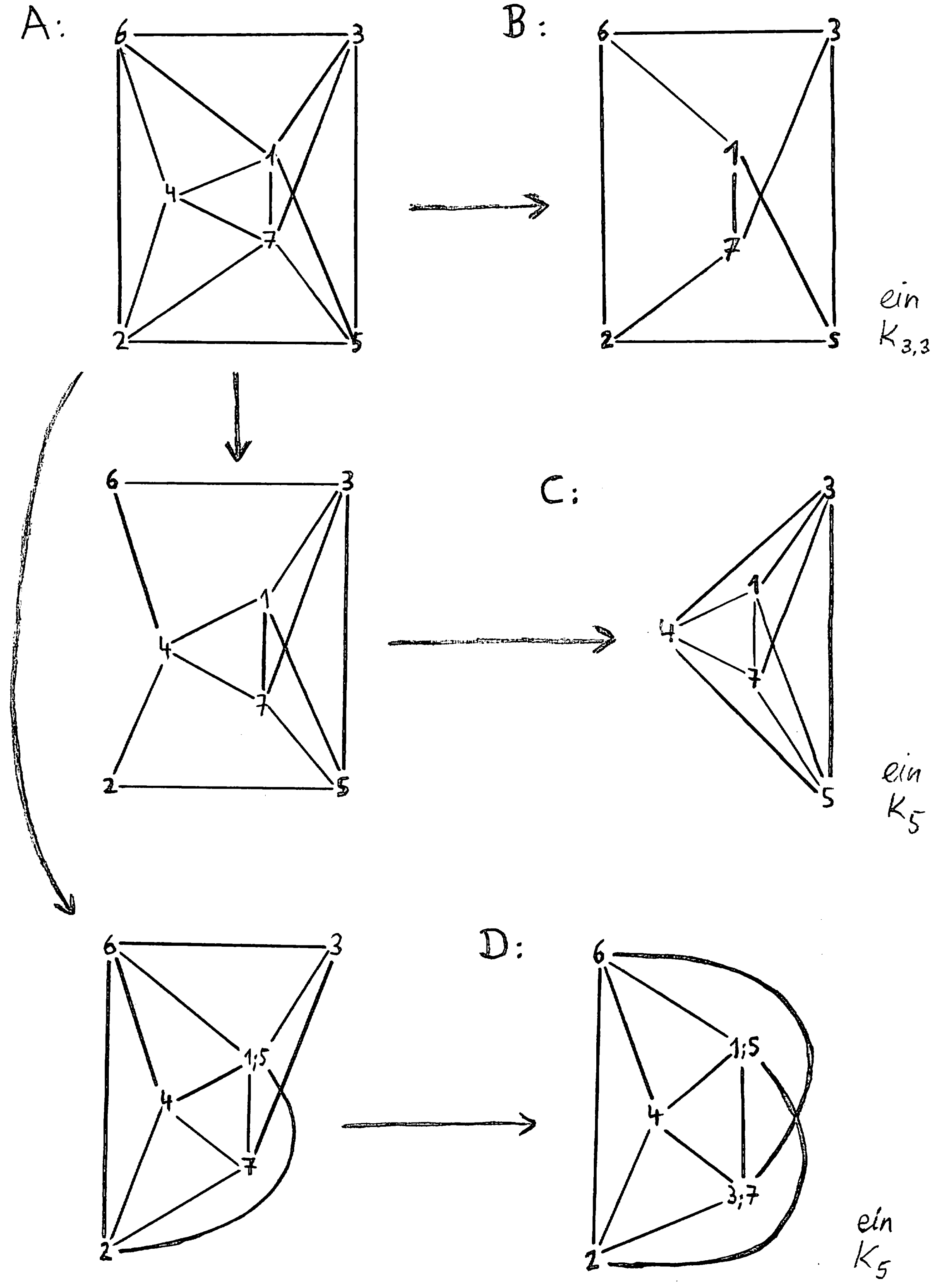
Nein, der Graph G ist nicht plättbar, denn:
Wenn G plättbar wäre, d.h. also ohne Kantenüberschneidungen gezeichnet werden könnte, so würde eine solche Zeichnung von G gemäß der Eulerschen Polyederformel die Zeichenebene in $|E| - |V| + 2 = 15 - 7 + 2 = 10$ Gebiete zerlegen. Dies kann aber nicht stimmen, denn G enthält ja 10 verschiedene Dreiecke mit den Eckentripeln $(1,3,5)$, $(1,3,6)$, $(1,3,7)$, $(1,4,6)$, $(1,4,7)$, $(1,5,7)$, $(2,4,6)$, $(2,4,7)$, $(2,5,7)$, $(3,5,7)$ und dazu auch noch ein von den vier Kanten $\{2,5\}$, $\{5,3\}$, $\{3,6\}$, $\{6,2\}$ erzeugtes Viereck, dessen beiden Diagonalen $\{2,3\}$ und $\{5,6\}$ beide nicht zur Kantenmenge E gehören, so daß dieses Viereck nicht aus zwei Dreiecken von G zusammengesetzt ist.
Oder:
Wenn man aus G den Knoten 4, die vier mit diesem Knoten 4 inzidierenden Kanten und zusätzlich auch noch die beiden Kanten $\{1,3\}$ sowie $\{5,7\}$ entfernt, so erhält man einen $K_{3,3}$ als Teilgraph von G, siehe Zeichnung B. Gemäß dem Satz von Kuratowski (Satz 2.6) kann dann G nicht plättbar sein.
Oder:
Wenn man aus G die drei Kanten $\{1,6\}$, $\{1,7\}$, $\{2,7\}$ entfernt und dann die beiden Kanten $\{2,4\}$ und $\{2,5\}$ miteinander verschmelzt und auch die beiden Kanten $\{3,6\}$ und $\{4,6\}$ miteinander verschmelzt, so erhält man einen K_5, siehe Zeichnung C. Gemäß dem Satz von Kuratowski (Satz 2.6) kann dann G nicht plättbar sein.
Oder:
Wenn man in G die beiden Knoten 1 und 5 miteinander verschmelzt sowie die beiden Knoten 3 und 7 miteinander verschmelzt, so erhält man einen K_5, siehe Zeichnung D. Gemäß Satz (2.7) kann dann G nicht plättbar sein.

g) Ist G eulersch?

Nein, der Graph G ist nicht eulersch, da nicht alle seine Knoten geraden Grad haben, denn es gilt ja $\deg(1) = 5 = \deg(7)$, siehe b) und Satz 2.8.

h) Ist G hamiltonsch?

Ja, der Graph G ist hamiltonsch, da ja immer $\deg(v) \geq 4 \geq \frac{1}{2}|V|$ für alle $v \in V$ gilt, siehe b) und Korollar 2.10.
Oder:
Man kann direkt einen Hamiltonkreis in G angeben, z.B. $(1,3,5,7,2,4,6,1)$.


A:
B:
ein $K_{3,3}$
C:
ein K_5
D:
ein K_5