# KLAUSUR

Diskrete Strukturen II

16. 2. 2004 10:00 - 12:00

Andreas Klein

| Name: | Vorname: | Matr.–Nr.: |
| --- | --- | --- |
| | | |

Bitte benutzen Sie für jede Aufgabe ein neues Blatt
und beschreiben Sie nur die Blätter nur einseitig!

Zum Bestehen der Klausur reichen $20$ Punkte.

| 1) | 2) | 3) | 4) | 5) |
| --- | --- | --- | --- | --- |
| | | | | |

| Punkte: | Note: |
| --- | --- |
| | |

**Aufgabe 1 (10 Punkte)**

Bestimmen Sie das Maximum von $17x_1 - 13x_2 - 2x_3 + 8x_4$ unter den Nebenbedingungen:

$$\begin{aligned} 2x_1 - x_2 + x_4 &\leq 4 \\ x_1 - x_3 + x_4 &\leq 3 \\ x_1 + 3x_2 - 2x_3 &\leq 4 \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0, x_4 \geq 0 \end{aligned}$$

Lösen Sie mit dem Simplexalgorithmus!

**Aufgabe 2 (3+5 Punkte)**

Es sei $a_i = i^2$ für $i = 1, \ldots, 99$.

a) Berechnen Sie den Median, den Quartilsabstand und die Spannweite der Daten $a_i$.

b) Ist das arithmetische Mittel $\bar{a}$ größer oder kleiner als der Median? (Begründung)

**Aufgabe 3 (8 Punkte)**

Ein lineares Schieberegister der Ordnung $4$ erzeugt die folgende Folge von Bits

$$1, 0, 0, 1, 1, 0, 1, 0, \ldots .$$

Bestimmen Sie die Startwerte und die Koeffizienten der Rückkopplungsfunktion.

**Aufgabe 4: (3+3+2+2 Punkte)**

a) Wandeln Sie die folgenden Zahlen in das Dezimalsystem um.
$(1201)_3$, $(44)_7$, $(3124)_{-5}$

b) Wie lautet die Zahl $100$ im System mit der Basis $2$, $5$ bzw. $-10$?

c) Geben Sie $(1100101)_2$ im Hexadezimalsystem an.

d) Geben Sie $(43)_7$ im Dualsystem an.

**Aufgabe 5: (2+4 Punkte)**

Wie in der Vorlesung besprochen, erzeugt man in $[0, 1]$ gleich verteilte Pseudozufallszahlen $U_n$ durch die Vorschrift

$$X_{n+1} = (aX_n + c) \mod m \qquad , \qquad U_n = X_n/m \; .$$

a) Zeigen Sie, die Folge $U_n$ erfüllt die Rekursionsgleichung

(*) $$U_{n+1} = (aU_n + \frac{c}{m}) \mod 1 \; .$$

($x \mod 1 = x - \lfloor x \rfloor$ bezeichnet den Nachkommaanteil von $x$.)

b) Begründen Sie kurz, warum man nicht (*) und Fließkomma-Arithmetik zur Berechnung der Folge $U_n$ nehmen sollte.

**Lösung Aufgabe 1**

Schlupfvariablen einführen ⇒ Nebenbedingungen:

$$\begin{aligned} 2x_1 - x_2 + x_4 + y_1 &= 4 \\ x_1 - x_3 + x_4 + y_2 &= 3 \\ x_1 + 3x_2 - 2x_3 + y_3 &= 4 \end{aligned}$$
$$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0, x_4 \geq 0, y_1 \geq 0, y_2 \geq 0, y_3 \geq 0$$

Minimierungsproblem erzeugen:
Minimiere: $-17x_1 + 13x_2 + 2x_3 - 8x_4$
Problem ist nun in kanonischer Form, d.h. wir können den Simplexalgorithmus anwenden:

| | -17 | 13 | 2 | -8 | 0 | 0 | 0 | 0 | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | $x_1$ | $x_2$ | $x_3$ | $x_4$ | $y_1$ | $y_2$ | $y_3$ | r.S. | |
| 0 | 2 | -1 | 0 | 1 | 1 | 0 | 0 | 4 | <u>2</u> |
| 0 | 1 | 0 | -1 | 1 | 0 | 1 | 0 | 3 | 3 |
| 0 | 1 | 3 | -2 | 0 | 0 | 0 | 1 | 4 | 4 |
| | -17 | 13 | 2 | -8 | 0 | 0 | 0 | 0 | |
| -17 | 1 | $-\frac{1}{2}$ | 0 | $\frac{1}{2}$ | $\frac{1}{2}$ | 0 | 0 | 2 | |
| 0 | 0 | $\frac{1}{2}$ | -1 | $\frac{1}{2}$ | $-\frac{1}{2}$ | 1 | 0 | 1 | |
| 0 | 0 | $\frac{7}{2}$ | -2 | $-\frac{1}{2}$ | $-\frac{1}{2}$ | 0 | 1 | 2 | |
| | 0 | $\frac{9}{2}$ | 2 | $\frac{1}{2}$ | $\frac{17}{2}$ | 0 | 0 | $\underline{\underline{34}}$ | |

Zusatzzeile $\geq 0$, d.h. Optimum erreicht.
Optimale Lösung: $x_1 = 2$, $x_2 = x_3 = x_4 = 0$ ($y_1 = 0$, $y_2 = 1$, $y_3 = 2$).
Der maximale Wert der Zielfunktion $17x_1 - 13x_2 - 2x_3 + 8x_4$ ist $34$.

**Lösung Aufgabe 2**

a) Median $= a_{50} = 2500$, Quartilsabstand $= a_{75} - a_{25} = 5000$, Spannweite $= a_{99} - a_1 = 9800$

b) Das arithmetische Mittel ist größer als der Median, denn es gilt:

$$(50-x)^2 + (50+x)^2 = 2(50^5 + x^2) > 2 \cdot 50^2 \quad \text{für } x \geq 1.$$

Also folgt:

$$\bar{a} = \frac{1}{99}\sum_{i=1}^{99} i^2 > \frac{1}{99}(50^2 + 49(2 \cdot 50^2)) = 50^2$$

**Lösung Aufgabe 3**

Die Startwerte $b_0, \ldots, b_3$ können direkt abgelesen werden.

$$b_0 = 1, b_1 = 0, b_2 = 0, b_3 = 1$$

Es folgt:

((I)) $\quad b_4 = 1 = c_0 b_0 + \ldots c_3 b_3 = c_0 + c_3$
((II)) $\quad b_5 = 0 = c_0 b_1 + \ldots c_3 b_4 = c_2 + c_3$
((III)) $\quad b_6 = 1 = c_0 b_2 + \ldots c_3 b_5 = c_1 + c_2$
((IV)) $\quad b_7 = 0 = c_0 b_3 + \ldots c_3 b_6 = c_0 + c_1 + c_3$

Aus $(I)+(IV)$ folgt $c_1 = 1$.
Einsetzen in $(III) \Rightarrow c_2 = 0$
Einsetzen in $(II) \Rightarrow c_3 = 0$
Einsetzen in $(I) \Rightarrow c_0 = 1$
Wir erhalten somit als einzige Lösung:
Das Schieberegister hat die Startwerte

$$b_0 = 1, b_1 = 0, b_2 = 0, b_3 = 1$$

und die Rückkopplungsfunktion

$$b_{n+4} = b_n + b_{n+1} \; .$$

**Lösung Aufgabe 4**

a) $(1201)_3 = 3^3 + 2 \cdot 3^2 + 1 = 46$
$(44)_7 = 4 \cdot 7 + 4 = 32$
$(3124)_{-5} = 3 \cdot (-5)^3 + (-5)^2 + 2 \cdot (-5) + 4 = -375 + 25 - 10 + 4 = -356$

b) Division durch 2:

$$\left.\begin{array}{r} 100 \mod 2 = 0 \\ 50 \mod 2 = 0 \\ 25 \mod 2 = 1 \\ 12 \mod 2 = 0 \\ 6 \mod 2 = 0 \\ 3 \mod 2 = 1 \\ 1 \mod 2 = 1 \end{array}\right\} \Rightarrow 100 = (1100100)_2$$

Division durch 5:

$$\left.\begin{array}{r} 100 \mod 5 = 0 \\ 20 \mod 5 = 0 \\ 4 \mod 5 = 4 \end{array}\right\} \Rightarrow 100 = (400)_5$$

Es gilt $(-10)^2 = 100$. Also $100 = (100)_{-10}$!

c) $16 = 2^4$, $(0101)_2 = (5)_{16}$, $(0110)_2 = (6)_{16}$. Also:

$$(1100101)_2 = (56)_{16}$$

d) $(43)_7 = 31 = (11111)_2$

**Lösung Aufgabe 5**

a) Es gilt:

$$\begin{aligned} U_{n+1} &= \frac{X_n}{m} \\ &= \frac{(aX_n + c) \mod m}{m} \\ &= (a\frac{X_n}{m} + \frac{c}{m}) \mod 1 \\ &= (aU_n + \frac{c}{m}) \mod 1 \end{aligned}$$

b) Es gibt zwei Gründe, die gegen die Verwendung von (*) sprechen:

1) In der Regel wird $a$ relativ groß gewählt sein. Dann ist $aU_n \gg \frac{c}{m}$ und daher ist die Rechnung $aU_n + \frac{c}{m}$ relativ ungenau.
   Außerdem ist die Operation $\mod 1$ für $aU_n + \frac{c}{m} \gg 1$ sehr ungenau. (Auslöschung bei der Berechnung von $(aU_n + \frac{c}{m}) - \lfloor aU_n + \frac{c}{m} \rfloor$.)
   Daher werden bei (*) nur die ersten Stellen der Zahlen $U_n$ brauchbar sein.

2) Die Resultate über die Periodenlänge und andere Gütekriterien für Pseudozufallszahlen gelten nur für exakte Rechnungen. Für die Qualität der durch * erzeugten Folge gibt es *keine* theoretische Grundlage. Ohne eine solche Grundlage sollte man jedoch keinen Algorithmus zur Berechnung von Pseudozufallszahlen einsetzen.