Wintersemester 2005/2006 20.2.2006

Diskrete Strukturen II, Klausur

Name	Vorname	Matrikelnummer

Aufgabe	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	$\sum$
Punkte											

Bitte schreiben Sie auf jeden Zettel, den Sie abgeben, deutlich Ihren Namen. Bei Multiple-Choice-Aufgaben ergibt jedes korrekte, falsche bzw. nicht angekreuzte Kästchen $+1/2$, $-1/2$ bzw. 0 Punkte.

Aufgabe 1: *(6 Punkte)*

Bestimmen Sie die Multiplikationstafel der multiplikativen Gruppe $(\mathbb{Z}/9\mathbb{Z})^\times$ der invertierbaren Elemente von $(\mathbb{Z}/9\mathbb{Z})$.

Aufgabe 2: *(2+3 Punkte)*
Bestimmen Sie die Lösungsmengen folgender Gleichungen:
(a) $x^3 = 3$ in den Ringen $\mathbb{Z}$ und $\mathbb{F}_5$.
(b) $x^2 + 7 = 0$ in den Körpern $\mathbb{Q}$, $\mathbb{C}$ und $\mathbb{F}_3$.

Aufgabe 3: *(6 Punkte, minimal 0 Punkte)*
X_1 und X_2 seien die Zufallsvariablen, die die Augenzahl von zwei normalen Würfeln annehmen. Weiterhin sei $X := X_1 + X_2$. Welche Aussagen gelten?

	Wahr	Falsch
$P(X \geq 11) = \frac{1}{12}$.		
$P(X_1 \neq X_2) = \frac{5}{6}$.		
$P(X_1 < X_2) = \frac{1}{2}$.		
$E(X) = 6$.		
$\mathrm{Var}(X)$=2		
$E(X) - E(X_1) = E(X_2)$.		

Welche Aussagen sind wahr bzw. falsch?

	Wahr	Falsch
Sei $n \in \mathbb{N}$ eine Quadratzahl, dann ist $n \equiv 2 \bmod 4$.		
Es gibt einen Körper mit 25 Elementen.		
$(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}, +, \cdot)$ ist genau dann Körper, wenn n eine Primzahlpotenz ist.		
Es sei $(R, +, \cdot)$ ein Ring mit $a \cdot b \neq 0$ für alle $a, b \neq 0$. Dann ist R ein Körper.		
Es gibt eine Primzahl p mit $p \equiv 4 \bmod 5$.		
Es gibt eine ungerade Primzahl p mit $p \equiv 4 \bmod 8$.		

Aufgabe 4: *(5 Punkte)*
Eine natürliche Zahl $n \in \mathbb{N}$ sei in der Dezimaldarstellung

$$n = \sum_{i=0}^{k} a_i 10^i, 0 \leq a_i < 10$$

gegeben. Zeigen Sie:

n ist genau dann durch 11 teilbar, wenn die alternierende Quersumme $\sum_{i=0}^{k} (-1)^i a_i$ durch 11 teilbar ist.

Aufgabe 5: *(3 + 2 Punkte)*
Berechnen Sie alle Lösungen $x, y \in \mathbb{Z}$ zu den Gleichungssystemen

$$\begin{array}{lrcll} \text{(a)} & y & \equiv & 4 & \pmod 8 \\ & y & \equiv & 1 & \pmod 4. \\ \text{(b)} & x & \equiv & 5 & \pmod 7 \\ & x & \equiv & 2 & \pmod 5, \end{array}$$

Aufgabe 6: *(5 Punkte)*
Es seien

$$A := \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 4 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{F}_5^{3\times 3}, \quad a := \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \in \mathbb{F}_5^3.$$

Bestimmen Sie alle Lösungen der Gleichung $Ax = a$.

Aufgabe 7: *(2+2+2 Punkte)*
Es sei $\mathbb{F}_3$ der Körper mit 3 Elementen. Zeigen Sie:

(a) Das Polynom $f(X) = X^2 + 1 \in \mathbb{F}_3[X]$ ist unzerlegbar.

(b) Es sei $K := (\mathbb{F}_3[X]/(f(X)\mathbb{F}_3[X]), +, \cdot)$ der Körper mit 9 Elementen. Weiterhin sei x eine Nullstelle von $f(X)$ in K. Berechnen Sie $x(x+1)$ in der kanonischen Darstellung.

(c) Bestimmen Sie das (multiplikative) Inverse von x.

Aufgabe 8: *(1 + 3 + 2 Punkte)*
Es werden zwei faire vierseitige Würfel geworfen. X_1 bezeichne die Zufallsvariable, welche die Summe der beiden Würfel angibt. Die Zufallsvariable X_2 nehme den Wert 1 an, wenn beide Würfel dieselbe Zahl zeigen, ansonsten sei sie 0. Weiterhin sei $X = X_1 \cdot X_2$.

(a) Welche Werte nimmt die Zufallsvariable X an?

(b) Bestimmen Sie die Erwartungswerte $\mathrm{E}(X_1), \mathrm{E}(X_2)$ und $\mathrm{E}(X)$.

(c) Bestimmen Sie die Varianz $\mathrm{Var}(X)$.

Aufgabe 9: *(3 + 3 Punkte)*
3 Urnen enthalten verschiedenfarbige Kugeln wie folgt:

Urne	1	2	3
Anzahl rote	4	3	1
Anzahl grüne	2	1	7

Es wird eine beliebige Urne ausgewählt und ihr eine beliebige Kugel entnommen.

(a) Wie hoch ist die Wahrscheinlichkeit, dass die Kugel rot ist?

(b) Mit welcher Wahrscheinlichkeit wurde die erste Urne gewählt, wenn man weiss, dass die gezogene Kugel rot ist?

Aufgabe 10: *(6 Punkte)*
Wir haben zwei Urnen. Die erste Urne enthält 10 Kugeln: 4 rote und 6 blaue. Die zweite Urne enthält 16 rote Kugeln und eine unbekannte Anzahl b von blauen Kugeln. Wir ziehen rein zufällig und unabhängig je eine Kugel aus jeder Urne. Die Wahrscheinlichkeit, dass beide Kugeln dieselbe Farbe haben sei 0,44. Bestimmen Sie die Anzahl b der blauen Kugeln in der zweiten Urne.