NACHKLAUSUR

Diskrete Strukturen II

28. 9. 2004   9:00 - 11:00

Andreas Klein

Name:	Vorname:	Matr.–Nr.:

Bitte benutzen Sie für jede Aufgabe ein neues Blatt
und beschreiben Sie die Blätter nur einseitig!

Zum Bestehen der Klausur reichen 20 Punkte.

1)	2)	3)	4)	5)

Punkte:	Note:

Aufgabe 1 (10 Punkte)

Bringen Sie das folgende Optimierungsproblem auf Normalform:

$$x_1 - x_2 - x_3 + x_4 = max!$$

unter

$$\begin{aligned} 2x_1 - x_2 + x_4 &\leq 4 \\ x_1 - x_3 + x_4 &\geq 7 \\ x_2 \geq 4, x_3 \leq 0, 0 \leq x_4 &\leq 4 \end{aligned}$$

Das neue Problem soll maximal 6 Variablen und 2 Gleichungen haben!

Aufgabe 2 (10 Punkte)

Bei einer Umfrage unter Studenten der Universität Kassel, werden die folgenden Daten erhoben: Geschlecht (m/w), Fachbereich (FB 01- FB 20), Studiendauer (in Semestern), Abiturnote (1.0 - 4.0).
Um welche Art von Merkmal (nominal, ordinal, metrisch) handelt es sich jeweils?
Geben Sie für jedes Merkmal eine angemessene graphische Darstellung an.
Welchen Lageparameter sollte man für das Merkmal Fachbereich, Studiendauer bzw. Abiturnote wählen?
Welcher Streuungsparameter ist für das Merkmal Studiendauer geeignet?

Aufgabe 3 (8 Punkte)

Im folgenden rechnen wir mit Bit-Werten ($1 + 1 = 0$).
Durch $a_0 = a_1 = a_2 = 1$, $a_{i+3} = a_i + a_{i+1}$ für $i \geq 0$ wird eine lineare Schieberegisterfolge der Ordnung 3 beschrieben.
Zeigen Sie:

a) Die Folge $b_i = a_i + 1$ kann nicht von einem linearen Schieberegister der Ordnung 3 erzeugt werden.

b) Die Folge $b_i = a_i + 1$ kann von einem linearen Schieberegister der Ordnung 4 erzeugt werden. Bestimmen Sie die Koeffizienten der Rückkopplungsfunktion und die Startwerte.

Aufgabe 4:(6 Punkte)

1. Stellen Sie 42 im Oktalsystem dar.
2. Geben Sie $(1001011011)_2$ im Dezimalsystem an.
3. Berechnen Sie (ohne das Dezimalsystem zu benutzen) $(4232)_5 + (321)_5$ und $(10101)_2 \cdot (1101)_2$.
4. Geben Sie -5 in der Einer- bzw. Zweier-Komplement Darstellung an (8-Bit).

Aufgabe 5: (6 Punkte)

Für zwei Fliesskommazahlen x und y soll $x^4 - y^4$ berechnet werden.
Erläutern Sie, wann es bei der obigen Formel zu Auslöschungseffekten kommt und geben Sie einen alternativen Rechenweg an, bei dem Auslöschungseffekte vermieden werden.

Lösung Aufgabe 1

Zunächst machen wir aus dem Maximumsproblem ein äquivalentes Minimumsproblem:

$$-x_1 + x_2 + x_3 - x_4 = min!$$

Aus den beiden Ungleichungen erzeugen wir durch Einführung von Schlupfvariablen die Gleichungen

$$\begin{aligned} 2x_1 - x_2 + x_4 + y_1 &= 4 \\ x_1 - x_3 + x_4 - y_2 &= 7 \end{aligned}$$

und die Vorzeichenbedingungen $y_1 \geq 0, y_2 \geq 0$.
x_1 hat keine Vorzeichenbedingung kann also aus dem Problem mittels Gaußelimination entfernt werden.
Neue Gleichung: $-x_2 + 2x_3 - x_4 + y_1 + 2y_2 = -10$
Neue Zielfunktion: $x_2 - y_2 = min!$.
Die Bedingung $x_2 \geq 4$ wird durch die Substitution $\hat{x}_2 = x_2 - 4$ in die Standardvorzeichenbedingung $\hat{x}_2 \geq 0$ konvertiert.
Aus $x_3 \leq 0$ erzeugen wir mit der Substitution $\hat{x}_3 = -x_3$ die Bedingung $\hat{x}_3 \geq 0$.
Aus der Bedingung $0 \leq x_4 \leq 4$ entsteht nach Einführung einer neuen Schlupfvariablen $y_3 \geq 0$ die Gleichung $x_4 + y_3 = 4$ und die Vorzeichenbedingung $x_4 \geq 0$.
Die Normalform des Problems lautet daher:

$$\hat{x}_2 - y_2 = min!$$

unter

$$\begin{aligned} -\hat{x}_2 - 2\hat{x}_3 - x_4 + y_1 + 2y_2 &= -6 \\ x_4 + y_3 &= 4 \\ \hat{x}_2 \geq 0, \hat{x}_3 \geq 0, x_4 \geq 0, y_1 \geq 0, y_2 \geq 0, y_3 \geq 0 & \end{aligned}$$

Lösung Aufgabe 2

Geschlecht und Fachbereich sind nominale (beschreibende) Merkmale. Die Abiturnote ist ein ordinales (anordnendes) Merkmal und die Studiendauer ist ein metrisches (zahlmäsig erfaßbares) Merkmal
Angemessene graphische Darstellungen für die Merkmale sind ein Kreisdiagramm für die Geschlechterverteilung, Balkendiagramme für Fachbereiche und die Abiturnoten, sowie ein Histogramm für die Studiendauer.
Für das nominale Merkmal Fachbereich ist der Modalwert (größter Fachbereich) der einzige sinnvolle Lageparameter. Für das ordinale Merkmal Abiturnote können wir den Median berechnen. Für die Studiendauer ist das arithmetische Mittel ein geeigneter Lageparameter.
Die empirische Varianz ist ein geeigneter Streuungsparameter für die Studiendauer.
Bemerkung
Hier sind auch andere Antworten möglich, z.B. könnte man für die Darstellung der Fachbereiche auch ein Kreisdiagramm wählen. (Ich habe mich jedoch für das Balkendiagramm entschieden, da ich bei deutlich mehr als 10 verschieden Merkmalsausprägungen Kreisdiagramme für unübersichtlich halte.)
Will man bei Studiendauer robuste (Ausreißer unempfindliche) Parameter, so kann man den Median und den Quartielsabstand als Lage- bzw. Streuungsparameter wählen. Dies ist besonders bei kleinen Stichprobenumfang empfehlenswert.

Lösung Aufgabe 3

Wir rechnen zunächst die ersten Werte der beiden Folgen aus

i	0	1	2	3	4	5	6	7
a_i	1	1	1	0	1	0	0	1
b_i	0	0	0	1	0	1	1	0

a) Die Folge b_i beginnt mit 3 Nullen. Angenommen sie würde von einem Schieberegister der Ordnung 3 erzeugt werden, d.h. $b_{i+3} = c_2 b_{i+2} + c_1 b_{i+1} + c_0 b_i$ für geeignete Koeffizienten c_i. Da die ersten drei Werte 0 sind müßte unabhängig von der Wahl der c_i der Rest der Folge ebenfalls 0 sein. Dies ist nicht der Fall, d.h. die Folge b_i wird nicht von einem Schieberegister der Ordnung 3 erzeugt.

b) Wir glauben die Aussage der Aufgabenstellung, daß es ein entsprechendes Schieberegister der Ordnung 4 gibt und bestimmen die passenden Rückkopplungskoeffizienten durch Lösen eines linearen Gleichungssystems.

$$\begin{aligned}
0 = b_4 &= c_3 b_3 + \ldots + c_0 b_0 = c_3 \\
1 = b_5 &= c_3 b_4 + \ldots + c_0 b_1 = c_2 \\
1 = b_6 &= c_3 b_5 + \ldots + c_0 b_2 = c_3 + c_1 \\
0 = b_7 &= c_3 b_6 + \ldots + c_0 b_3 = c_3 + c_1 + c_0
\end{aligned}$$

Die Lösung des Gleichungssystems ist $c_3 = 0$, $c_2 = 1$, $c_1 = 1$, $c_0 = 1$. Also erfüllt die Folge die Rekursionsgleichung $b_{i+4} = b_{i+2} + b_{i+1} + b_i$.

Bemerkung

Es war nicht Teil der Aufgabe nachzuweisen, daß das in Teil b berechnete Schieberegister tatsächlich die Folge b_i erzeugt. Wir haben bisher nur nach gewiesen, daß wenn es ein Schieberegister der Ordnung 4 gibt, daß die Folge b_i erzeugt, es das von uns gefundene Schieberegister ist.

Will man beweisen, daß die gefundene Rekursionsformel tatsächlich die Folge b_i erzeugt, kann man dies z.B. mit vollständiger Induktion leicht erreichen.

Lösung Aufgabe 4

a) $42 = (52)_8$

b) $(1001011011)_2 = 603$

c)
$$\begin{array}{ccccc}
 & 4 & 2 & 3 & 2 \\
 & {}_1 & 3_1 & 2_1 & 1 \\
\hline
1 & 0 & 1 & 1 & 3
\end{array}
\qquad
\begin{array}{cccccccccc}
1 & 0 & 1 & 0 & 1 & \cdot & 1 & 1 & 0 & 1 \\
\hline
 & & & & & & 1 & 1 & 0 & 1 \\
 & & & & 1 & 1 & 0 & 1 & & \\
 & 1 & 1 & 0_1 & 1_1 & {}_1 & {}_1 & & & \\
\hline
 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1
\end{array}$$

d) $5 = (00000101)$. Also $-5 = (11111010)$ in der Einer-Komplement Darstellung und $-5 = (11111011)$ in der Zweier-Komplement Darstellung.

Lösung Aufgabe 5

Falls $|x| \approx |y|$ so ist $x^4 \approx y^4$ und bei der Rechnung $x^4 - y^4$ werden die Rundsfehler aus den vorangegangen Rechnungen überdeutlich (Auslöschung).
Wir formen mit der dritten binomischen Formel um:

$$x^4 - y^4 = (x^2 + y^2)(x^2 - y^2) = (x^2 + y^2)(x + y)(x - y)$$

Berechnet man $x^4 - y^4$ mit der algebraisch äquivalenten Formel $(x^2 + y^2)(x + y)(x - y)$ so können keine Auslöschungeffekte auftreten, denn x^2 und y^2 haben immer positives Vorzeichen und in den Teilschritten $x + y$ und $x - y$ gibt es noch keine vorangegangen Rechnungen und daher noch keine Rundungsfehler.