KLAUSUR

Diskrete Strukturen I – Sommersemester 2006

15. 09. 2006

(R. Küstner)

Name:	Vorname:	Matrikelnummer:

Bitte schreiben Sie auf jedes Ihrer Blätter an den oberen Rand
Ihren Namen und Vornamen sowie Ihre Matrikelnummer.

Zum Bestehen der Klausur sollten 40 Punkte erreicht werden.

1.	2.	3.	4.	5.	6.	7.a)	7.b)

Punkte:	Note:

Klausur (15.09.2006)

1. Aufgabe (10 Punkte)
   Verifizieren Sie (durch Wahrheitswertetabellen oder durch gleichwertige Umformungen) die aussagenlogische Gleichwertigkeit $(p \to q) \to r \;\equiv\; ((\neg p) \to r) \wedge (q \to r)$.

2. Aufgabe (6 Punkte)
   Gegeben seien die beiden Mengen $A = \{1, 2, 3, 4\}$ und $B = \{0, 2, 4, 6\}$.
   i) Bestimmen Sie $A\backslash B$ und $B\backslash A$ sowie $(A\backslash B) \cup (B\backslash A)$.
   ii) Bestimmen Sie $A \cup B$ und $A \cap B$ sowie $(A \cup B)\backslash(A \cap B)$.

3. Aufgabe (12 Punkte)
   Beweisen Sie durch vollständige Induktion, daß für alle $n \in \mathbb{N} = \{0, 1, 2, \ldots\}$ die Summenformel $\sum_{k=0}^{n} \big(3k(k+1)+1\big) = (n+1)^3$ gilt.

4. Aufgabe (14 Punkte)
   Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, daß beim Roulette (bei dem jede der Zahlen von 0 bis 36 mit der gleichen Wahrscheinlichkeit 1/37 fällt) die gefallene Zahl weder durch 3, noch durch 5, noch durch 7 teilbar ist? (Zur Erinnerung: 0 ist durch jede Zahl teilbar.)

5. Aufgabe (15 Punkte)
   Eine Urne enthält zwei weiße und drei schwarze Kugeln. Man zieht zufällig eine Kugel, legt sie wieder zurück in die Urne und fügt zusätzlich noch eine weitere Kugel mit der gezogenen Farbe in die Urne hinzu. Anschließend zieht man wieder zufällig eine Kugel.
   i) Mit welcher Wahrscheinlichkeit war dann die erste gezogene Kugel weiß, wenn die zweite gezogene Kugel schwarz ist?
   ii) Sind bei diesem Experiment die zwei Ereignisse "die erste gezogene Kugel ist weiß" und "die zweite gezogene Kugel ist schwarz" abhängig oder unabhängig?

6. Aufgabe (15 Punkte)
   Die Zufallsvariable X bezeichne den Absolutbetrag der Differenz der beiden Augenzahlen beim Werfen von zwei Würfeln. Bestimmen Sie den zugrunde liegenden Ergebnisraum Ω, den Wertebereich $X(\Omega)$, die Wahrscheinlichkeiten $P(X = m)$ für $m \in X(\Omega)$ sowie den Erwartungswert $E(X)$ und die Varianz $V(X)$.

7. Aufgabe (12 Punkte + 16 Punkte)
   Finden Sie explizite Lösungsformeln für x_n, wenn x_n durch die folgenden Rekursionen definiert wird:
   a) $x_0 = 0$, $x_1 = 1$ und $x_n = x_{n-1} + 2x_{n-2}$ für $n \geq 2$
   b) $x_0 = 0$, $x_1 = 1$, $x_2 = 10$ und $x_n = 7x_{n-1} - 15x_{n-2} + 9x_{n-3}$ für $n \geq 3$

Bitte schreiben Sie deutlich und lesbar!

Viel Erfolg!

Musterlösung zur Klausur (15.09.2006)

1. Aufgabe (10 Punkte)
   Verifizieren Sie (durch Wahrheitswertetabellen oder durch gleichwertige Umformungen) die aussagenlogische Gleichwertigkeit $(p \to q) \to r \;\equiv\; ((\neg p) \to r) \wedge (q \to r)$.

p	q	r	$p \to q$	$(p \to q) \to r$	$\neg p$	$(\neg p) \to r$	$q \to r$	$((\neg p) \to r) \wedge (q \to r)$
0	0	0	1	0	1	0	1	0
0	0	1	1	1	1	1	1	1
0	1	0	1	0	1	0	0	0
0	1	1	1	1	1	1	1	1
1	0	0	0	1	0	1	1	1
1	0	1	0	1	0	1	1	1
1	1	0	1	0	0	1	0	0
1	1	1	1	1	0	1	1	1

   Mit Hilfe der aus Übungsaufgabe 1.1 bekannten Gleichwertigkeiten $p \to q \;\equiv\; (\neg p) \vee q$ und $\neg(\,p \vee q) \;\equiv\; (\neg p) \wedge (\neg q)$ sowie $(\,p \wedge q) \vee r \;\equiv\; (\,p \vee r) \wedge (q \vee r)$ kann man auch gleichwertig umformen: $(\,p \to q) \to r \;\equiv\; (\neg((\neg p) \vee q)) \vee r \;\equiv\; ((\neg(\neg p)) \wedge (\neg q)) \vee r \;\equiv\; ((\neg(\neg p)) \vee r) \wedge ((\neg q) \vee r) \;\equiv\; ((\neg p) \to r) \wedge (q \to r)$.

2. Aufgabe (6 Punkte)
   Gegeben seien die beiden Mengen $A = \{1, 2, 3, 4\}$ und $B = \{0, 2, 4, 6\}$.
   i) Bestimmen Sie $A \backslash B$ und $B \backslash A$ sowie $(A \backslash B) \cup (B \backslash A)$.
      Es gilt $A \backslash B = \{1, 3\}$ und $B \backslash A = \{0, 6\}$ sowie $(A \backslash B) \cup (B \backslash A) = \{0, 1, 3, 6\}$.
   ii) Bestimmen Sie $A \cup B$ und $A \cap B$ sowie $(A \cup B) \backslash (A \cap B)$.
      Es gilt $A \cup B = \{0, 1, 2, 3, 4, 6\}$ und $A \cap B = \{2, 4\}$ sowie $(A \cup B) \backslash (A \cap B) = \{0, 1, 3, 6\}$.

3. Aufgabe (12 Punkte)
   Beweisen Sie durch vollständige Induktion, daß für alle $n \in \mathbb{N} = \{0, 1, 2, \ldots\}$ die Summenformel $\sum_{k=0}^{n} \big(3k(k+1)+1\big) = (n+1)^3$ gilt.

   Induktionsanfang: Für $n = 0$ gilt

$$\sum_{k=0}^{n} \big(3k(k+1)+1\big) = \sum_{k=0}^{0} \big(3k(k+1)+1\big) = 3 \cdot 0(0+1)+1 = 1 = 1^3 = (0+1)^3 = (n+1)^3.$$

   Induktionsannahme: Wir nehmen an, für ein festes $n \in \mathbb{N} = \{0, 1, 2, \ldots\}$ gelte

$$\sum_{k=0}^{n} \big(3k(k+1)+1\big) = (n+1)^3.$$

   Induktionsschritt: Unter Verwendung der Induktionsannahme zeigen wir, daß dann auch

$$\sum_{k=0}^{n+1} \big(3k(k+1)+1\big) = (n+1+1)^3$$

gilt, denn

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{n+1}\big(3k(k+1)+1\big) &= \sum_{k=0}^{n}\big(3k(k+1)+1\big)+3(n+1)(n+1+1)+1\\ &= (n+1)^3+3(n+1)(n+1+1)+1\\ &= (n+1)^3+3(n+1)^2+3(n+1)+1\\ &= (n+1+1)^3.\end{aligned}$$

4. Aufgabe (14 Punkte)
Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, daß beim Roulette (bei dem jede der Zahlen von 0 bis 36 mit der gleichen Wahrscheinlichkeit 1/37 fällt) die gefallene Zahl weder durch 3, noch durch 5, noch durch 7 teilbar ist? (Zur Erinnerung: 0 ist durch jede Zahl teilbar.)

Hier gilt $\Omega = \{0, 1, 2, 3, \dots, 35, 36\}$ und $|\Omega| = 37$ sowie $P(\{\omega\}) = 1/37$ für jedes $\omega \in \Omega$. Es bezeichne $A = \big\{\, \omega \in \Omega : (3 \nmid \omega) \wedge (5 \nmid \omega) \wedge (7 \nmid \omega) \,\big\}$ das Ereignis, daß die gefallene Zahl weder durch 3, noch durch 5, noch durch 7 teilbar ist. Das Ereignis A kann direkt aufgezählt werden, $A = \{1, 2, 4, 8, 11, 13, 16, 17, 19, 22, 23, 26, 29, 31, 32, 34\}$. Also gilt $|A| = 16$ und für die gesuchte Wahrscheinlichkeit erhält man $P(A) = |A|/|\Omega| = 16/37$.

Natürlich kann man auch (etwas umständlicher) die Siebformel verwenden, denn es gilt $A = \Omega\backslash(D \cup F \cup S)$, wobei $D = \{\omega \in \Omega : 3|\omega\}$, $F = \{\omega \in \Omega : 5|\omega\}$, $S = \{\omega \in \Omega : 7|\omega\}$. Hier findet man $|D| = 13$, $|F| = 8$, $|S| = 6$, $|D \cap F| = 3$, $|D \cap S| = 2$, $|F \cap S| = 2$ sowie $|D \cap F \cap S| = 1$, mit der Siebformel dann $|D \cup F \cup S| = 13+8+6-3-2-2+1 = 21$, folglich $|A| = |\Omega| - 21 = 37 - 21 = 16$ und somit wieder $P(A) = |A|/|\Omega| = 16/37$.

5. Aufgabe (15 Punkte)
Eine Urne enthält zwei weiße und drei schwarze Kugeln. Man zieht zufällig eine Kugel, legt sie wieder zurück in die Urne und fügt zusätzlich noch eine weitere Kugel mit der gezogenen Farbe in die Urne hinzu. Anschließend zieht man wieder zufällig eine Kugel.

i) Mit welcher Wahrscheinlichkeit war dann die erste gezogene Kugel weiß, wenn die zweite gezogene Kugel schwarz ist?
Es sei A das Ereignis, daß die erste gezogene Kugel weiß ist, und B sei das Ereignis, daß die zweite gezogene Kugel schwarz ist. Weiter sei $\overline{A}$ das Ereignis, daß die erste Kugel schwarz ist, und $\overline{B}$ sei das Ereignis, daß die zweite Kugel weiß ist. Dann gelten $P(A) = 2/5$ und $P\big(\overline{A}\big) = 3/5$ sowie $P(B|A) = 1/2$ und $P\big(B|\overline{A}\big) = 2/3$, denn wenn die erste Kugel weiß ist, so befinden sich bei der zweiten Ziehung drei weiße und drei schwarze Kugeln in der Urne, und falls die erste Kugel schwarz ist, so befinden sich bei der zweiten Ziehung zwei weiße und vier schwarze Kugeln in der Urne. Damit gelten dann nach der Formel von der totalen Wahrscheinlichkeit
$$P(B) = P(B|A)P(A) + P\big(B|\overline{A}\big)P\big(\overline{A}\big) = (1/2)(2/5) + (2/3)(3/5) = 1/5 + 2/5 = 3/5$$
sowie (nach der Bayesschen Formel bzw. der Definition bedingter Wahrscheinlichkeiten)
$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{P(B|A)P(A)}{P(B)} = \frac{(1/2)(2/5)}{3/5} = \frac{1}{3}.$$
Wenn die zweite gezogene Kugel schwarz ist, war die erste gezogene Kugel also mit Wahrscheinlichkeit 1/3 weiß.

ii) Sind bei diesem Experiment die zwei Ereignisse “die erste gezogene Kugel ist weiß” und “die zweite gezogene Kugel ist schwarz” abhängig oder unabhängig?
Nach Teil a) gelten $P(A) = 2/5$, $P(B) = 3/5$ sowie $P(A \cap B) = P(B|A)P(A) = (1/2)(2/5) = 1/5$ und folglich $P(A \cap B) = 1/5 \neq 6/25 = (2/5)(3/5) = P(A)P(B)$. Somit sind die beiden Ereignisse A und B abhängig, da $P(A \cap B) \neq P(A)P(B)$.

6. Aufgabe (15 Punkte)
Die Zufallsvariable X bezeichne den Absolutbetrag der Differenz der beiden Augenzahlen beim Werfen von zwei Würfeln. Bestimmen Sie den zugrunde liegenden Ergebnisraum Ω, den Wertebereich $X(\Omega)$, die Wahrscheinlichkeiten $P(X = m)$ für $m \in X(\Omega)$ sowie den Erwartungswert $E(X)$ und die Varianz $V(X)$.

Hier gelten $\Omega = \big\{(j,k) : j,k \in \{1,2,3,4,5,6\}\big\}$ und $X(\omega) = |j-k|$ für $\omega = (j,k) \in \Omega$ sowie $X(\Omega) = \{0,1,2,3,4,5\}$,

m	0	1	2	3	4	5
$P(X=m)$	$\frac{6}{36}$	$\frac{10}{36}$	$\frac{8}{36}$	$\frac{6}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{2}{36}$

und damit dann

$$\begin{aligned} E(X) = \sum_{m=0}^{5} mP(X=m) &= \frac{0\cdot 6 + 1\cdot 10 + 2\cdot 8 + 3\cdot 6 + 4\cdot 4 + 5\cdot 2}{36} \\ &= \frac{0+10+16+18+16+10}{36} = \frac{70}{36} = \frac{35}{18}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} E(X^2) = \sum_{m=0}^{5} m^2P(X=m) &= \frac{0^2\cdot 6 + 1^2\cdot 10 + 2^2\cdot 8 + 3^2\cdot 6 + 4^2\cdot 4 + 5^2\cdot 2}{36} \\ &= \frac{0+10+32+54+64+50}{36} = \frac{210}{36} = \frac{35}{6} \end{aligned}$$

sowie

$$V(X) = E(X^2) - (E(X))^2 = \frac{35}{6} - \left(\frac{35}{18}\right)^2 = \frac{35(54-35)}{18^2} = \frac{35\cdot 19}{18\cdot 18} = \frac{665}{324}.$$

7. Aufgabe (12 Punkte + 16 Punkte)
Finden Sie explizite Lösungsformeln für x_n, wenn x_n durch die folgenden Rekursionen definiert wird:

a) $x_0 = 0$, $x_1 = 1$ und $x_n = x_{n-1} + 2x_{n-2}$ für $n \geq 2$
Das zugehörige charakteristische Polynom $x^2 - x - 2 = (x-2)(x+1)$ hat die beiden einfachen Nullstellen $x = 2$ und $x = -1$. Die allgemeine Lösung der Rekursion $x_n = x_{n-1} + 2x_{n-2}$ für $n \geq 2$ hat folglich die Form $x_n = a \cdot 2^n + b \cdot (-1)^n$. Im Fall der Anfangbedingungen $x_0 = 0$ und $x_1 = 1$, d.h. $a + b = 0$ und $2a - b = 1$, gilt dabei dann $a = 1/3$ und $b = -1/3$.

b) $x_0 = 0$, $x_1 = 1$, $x_2 = 10$ und $x_n = 7x_{n-1} - 15x_{n-2} + 9x_{n-3}$ für $n \geq 3$
Das zugehörige charakteristische Polynom $x^3 - 7x^2 + 15x - 9$ hat in $x = 1$ eine Nullstelle und damit dann die Faktorisierung $x^3 - 7x^2 + 15x - 9 = (x-1)(x^2 - 6x + 9) = (x-1)(x-3)^2$. Die allgemeine Lösung der Rekursion $x_n = 7x_{n-1} - 15x_{n-2} + 9x_{n-3}$ für $n \geq 3$ hat folglich die Form $x_n = a \cdot 1^n + (b + c \cdot n)3^n$. Im Fall der Anfangbedingungen $x_0 = 0$, $x_1 = 1$ und $x_2 = 10$, d.h. $a + b = 0$, $a + 3b + 3c = 1$ und $a + 9b + 18c = 10$, gilt dabei dann $a = 1$, $b = -1$ und $c = 1$.