NACHHOLKLAUSUR

Diskrete Strukturen I
Sommersemester 2006

15. 3. 2007

(R. Küstner)

Name:	Vorname:	Matrikelnummer:

Bitte schreiben Sie auf jedes Ihrer Blätter an den oberen Rand Ihren Namen und Vornamen sowie Ihre Matrikelnummer.

Zum Bestehen der Klausur sollten 40 Punkte erreicht werden.

1.	2.	3.	4.	5.	6.	7.	8.a)	8.b)

Punkte:	Note:

Nachholklausur (15. 3. 2007)

1. Aufgabe (10 Punkte)
   Verifizieren Sie (mittels Wahrheitswertetabelle oder durch gleichwertige Umformungen) die folgende aussagenlogische Gleichwertigkeit: $(p \to q) \to (p \to r) \;\equiv\; (p \wedge q) \to r$

2. Aufgabe (5 Punkte)
   Gegeben seien die beiden Mengen $A = \{0,1\}$ und $B = \{0,1,2\}$.
   Zählen Sie $\mathcal{P}(A)$ und $\mathcal{P}(B)$ sowie $A \times B$ auf (d.h. geben Sie jeweils deren Elemente an).
   Bestimmen Sie außerdem $\mathcal{P}(B) \setminus \mathcal{P}(A)$ und $\mathcal{P}(B) \setminus (A \times B)$.

3. Aufgabe (10 Punkte)
   Beweisen Sie mittels vollständiger Induktion, daß für alle $n \in \mathbb{N} = \{0,1,2,3,\ldots\}$ die Summenformel $\sum\limits_{k=1}^{n} (2k-1)^2 = \frac{1}{3} n(4n^2 - 1)$ gilt.

4. Aufgabe (11 Punkte)
   Man würfelt zweimal nacheinander mit einem Würfel. Es sei A das Ereignis "die erste Augenzahl ist gerade", es sei B das Ereignis "die zweite Augenzahl ist ungerade" und es sei C das Ereignis "die Summe der beiden Augenzahlen ist durch 3 teilbar". Frage: Sind diese drei Ereignisse abhängig oder unabhängig?

5. Aufgabe (8 Punkte)
   Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, daß man beim Kniffel-Spiel (gleichzeitiges Werfen von fünf Würfeln) mit einem Wurf ein "Full House" erhält, d.h. drei gleiche Augenzahlen und dazu noch zwei gleiche Augenzahlen, z.B. (5,2,5,5,2), wobei natürlich auch ein "Kniffel", d.h. fünf gleiche Augenzahlen, z.B. (4,4,4,4,4), als "Full House" gezählt wird.

6. Aufgabe (16 Punkte)
   Ich schlage Ihnen das folgende Glücksspiel vor: Sie würfeln mit einem Würfel und ich würfle auch mit einem Würfel. Wenn die Summe der beiden Augenzahlen gerade ist, so erhalten Sie von mir diese Summe. Wenn die Summe der beiden Augenzahlen ungerade ist, so erhalte ich von Ihnen diese Summe. (In diesem Fall verlieren Sie die Summe, d.h. Ihr Gewinn ist dann negativ.) Die Zufallsvariable X beschreibe Ihren Gewinn bei diesem Spiel. Bestimmen Sie den zugrunde liegenden Ergebnisraum Ω, den Wertebereich $X(\Omega)$, die Wahrscheinlichkeiten $P(X = k)$ für alle $k \in X(\Omega)$ sowie den Erwartungswert $E(X)$ und die Varianz $V(X)$. Zu wessen Gunsten ist dieses Spiel oder ist es ein faires Spiel?

7. Aufgabe (15 Punkte)
   Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, daß man beim Mensch-ärgere-Dich-nicht-Spielen am Anfang genau zweimal eine Drei gewürfelt hat, bevor man seine erste Sechs würfelt?
   Hinweis: Für $|x| < 1$ gilt $\sum\limits_{k=0}^{\infty} \binom{k+2}{2} x^k = \left(\frac{1}{1-x}\right)^3$.

8. Aufgabe (9+16 Punkte)
   Finden Sie explizite Lösungsformeln für x_n, wenn x_n durch die folgenden Rekursionen definiert wird:

   a) $x_0 = 1$, $x_1 = 2$ und $x_n = x_{n-1} + 6x_{n-2}$ für $n \geq 2$

   b) $x_0 = 3$, $x_1 = 4$, $x_2 = 8$ und $x_n = 12x_{n-2} + 16x_{n-3}$ für $n \geq 3$

Musterlösung zur Nachholklausur (15. 3. 2007)

1. Aufgabe (10 Punkte)
   Verifizieren Sie (mittels Wahrheitswertetabelle oder durch gleichwertige Umformungen) die folgende aussagenlogische Gleichwertigkeit: $(p \to q) \to (p \to r) \;\equiv\; (p \wedge q) \to r$

p	q	r	$p \to q$	$p \to r$	$(p \to q) \to (p \to r)$	$p \wedge q$	$(p \wedge q) \to r$
0	0	0	1	1	1	0	1
0	0	1	1	1	1	0	1
0	1	0	1	1	1	0	1
0	1	1	1	1	1	0	1
1	0	0	0	0	1	0	1
1	0	1	0	1	1	0	1
1	1	0	1	0	0	1	0
1	1	1	1	1	1	1	1

Oder:
Aufgrund der Gleichwertigkeit $p \to q \;\equiv\; \neg p \vee q$ sowie der Tautologie $p \vee \neg p$ kann man wie folgt gleichwertig umformen bzw. vereinfachen:

$$
\begin{aligned}
(p \to q) \to (p \to r) &\equiv \neg(\neg p \vee q) \vee (\neg p \vee r) && \\
&\equiv (\neg\neg p \wedge \neg q) \vee (\neg p \vee r) && \text{de Morgan} \\
&\equiv (p \wedge \neg q) \vee (\neg p \vee r) && \text{doppelte Negation} \\
&\equiv \big((p \wedge \neg q) \vee \neg p\big) \vee r && \text{Assoziativität von } \vee \\
&\equiv \big((p \vee \neg p) \wedge (\neg q \vee \neg p)\big) \vee r && \text{Distributivität} \\
&\equiv (\neg q \vee \neg p) \vee r && \text{Vereinfachung} \\
&\equiv (\neg p \vee \neg q) \vee r && \text{Kommutativität von } \vee \\
&\equiv \neg(p \wedge q) \vee r && \text{de Morgan} \\
&\equiv (p \wedge q) \to r &&
\end{aligned}
$$

2. Aufgabe (5 Punkte)
   Gegeben seien die beiden Mengen $A = \{0,1\}$ und $B = \{0,1,2\}$.
   Zählen Sie $\mathcal{P}(A)$ und $\mathcal{P}(B)$ sowie $A \times B$ auf (d.h. geben Sie jeweils deren Elemente an).
   Bestimmen Sie außerdem $\mathcal{P}(B) \backslash \mathcal{P}(A)$ und $\mathcal{P}(B) \backslash (A \times B)$.

$$
\begin{aligned}
\mathcal{P}(A) &= \big\{\emptyset, \{0\}, \{1\}, \{0,1\}\big\} \\
\mathcal{P}(B) &= \big\{\emptyset, \{0\}, \{1\}, \{2\}, \{0,1\}, \{0,2\}, \{1,2\}, \{0,1,2\}\big\} \\
A \times B &= \big\{(0,0), (0,1), (0,2), (1,0), (1,1), (1,2)\big\} \\
\mathcal{P}(B) \backslash \mathcal{P}(A) &= \big\{\{2\}, \{0,2\}, \{1,2\}, \{0,1,2\}\big\} \\
\mathcal{P}(B) \backslash (A \times B) &= \mathcal{P}(B)
\end{aligned}
$$

3. Aufgabe (10 Punkte)
Beweisen Sie mittels vollständiger Induktion, daß für alle $n \in \mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, \ldots\}$ die Summenformel $\sum_{k=1}^{n} (2k-1)^2 = \frac{1}{3} n\big(4n^2 - 1\big)$ gilt.

Induktionsanfang: Für $n = 0$ gilt gemäß der Konvention für die leere Summe, daß

$$\sum_{k=1}^{n} (2k-1)^2 = \sum_{k=1}^{0} (2k-1)^2 = 0 = \frac{1}{3} \cdot 0 \cdot (4 \cdot 0^2 - 1) = \frac{1}{3} n\big(4n^2 - 1\big).$$

Induktionsvoraussetzung: Wir nehmen an, für ein festes $n \in \mathbb{N} = \{0, 1, 2, \ldots\}$ gelte

$$\sum_{k=1}^{n} (2k-1)^2 = \frac{1}{3} n\big(4n^2 - 1\big).$$

Induktionsschritt: Unter Verwendung der Induktionsvoraussetzung zeigen wir, daß auch

$$\sum_{k=1}^{n+1} (2k-1)^2 = \frac{1}{3}(n+1)\big(4(n+1)^2 - 1\big)$$

gilt, denn

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{n+1} (2k-1)^2 &= \sum_{k=1}^{n} (2k-1)^2 + \big(2(n+1) - 1\big)^2 \\
&= \frac{1}{3} n\big(4n^2 - 1\big) + (2n+1)^2 \\
&= \frac{1}{3}\Big(4n^3 - n + 3\big(4n^2 + 4n + 1\big)\Big) \\
&= \frac{1}{3}\Big(4\big(n^3 + 3n^2 + 3n + 1\big) - n - 1\Big) \\
&= \frac{1}{3}\Big(4(n+1)^3 - (n+1)\Big) \\
&= \frac{1}{3}(n+1)\big(4(n+1)^2 - 1\big).
\end{aligned}$$

4. Aufgabe (11 Punkte)
Man würfelt zweimal nacheinander mit einem Würfel. Es sei A das Ereignis “die erste Augenzahl ist gerade”, es sei B das Ereignis “die zweite Augenzahl ist ungerade” und es sei C das Ereignis “die Summe der beiden Augenzahlen ist durch 3 teilbar”. Frage: Sind diese drei Ereignisse abhängig oder unabhängig?

In diesem Fall des zweimaligen Würfelns ist der Ergebnisraum Ω gegeben durch $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}^2 = \big\{(j, k) : j, k \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}\big\}$ und es gilt somit $|\Omega| = 36$.
Die drei Ereignisse A, B, C sind genau dann unabhängig, wenn sie paarweise unabhängig sind und wenn außerdem $P(A \cap B \cap C) = P(A)P(B)P(C)$ gilt.
Zunächst ist klar, daß $|A| = 18 = |B|$ sowie $|A \cap B| = 9$ und folglich $P(A) = \frac{1}{2} = P(B)$ sowie $P(A \cap B) = \frac{1}{4} = P(A)P(B)$ gelten, d.h. A und B sind unabhängig. Weiter gelten

$$C = \big\{(1, 2), (2, 1), (1, 5), (2, 4), (3, 3), (4, 2), (5, 1), (3, 6), (4, 5), (5, 4), (6, 3), (6, 6)\big\},$$
$$A \cap C = \big\{(2, 1), (2, 4), (4, 2), (4, 5), (6, 3), (6, 6)\big\},$$
$$B \cap C = \big\{(2, 1), (1, 5), (3, 3), (5, 1), (4, 5), (6, 3)\big\},$$
$$A \cap B \cap C = (A \cap C) \cap (B \cap C) = \big\{(2, 1), (4, 5), (6, 3)\big\}$$

und somit $|C| = 12$, $|A \cap C| = 6$, $|B \cap C| = 6$ sowie $|A \cap B \cap C| = 3$. Demzufolge gelten dann $P(C) = \frac{1}{3}$, $P(A \cap C) = \frac{1}{6} = P(A)P(C)$, d.h. A und C sind unabhängig, und $P(B \cap C) = \frac{1}{6} = P(B)P(C)$, d.h. B und C sind unabhängig, sowie $P(A \cap B \cap C) = \frac{1}{12} = P(A)P(B)P(C)$. Die drei Ereignisse A, B, C sind somit unabhängig.

5. Aufgabe (8 Punkte)
Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, daß man beim Kniffel-Spiel (gleichzeitiges Werfen von fünf Würfeln) mit einem Wurf ein "Full House" erhält, d.h. drei gleiche Augenzahlen und dazu noch zwei gleiche Augenzahlen, z.B. (5,2,5,5,2), wobei natürlich auch ein "Kniffel", d.h. fünf gleiche Augenzahlen, z.B. (4,4,4,4,4), als "Full House" gezählt wird.

In diesem Fall des Werfens von fünf Würfeln ist der Ergebnisraum Ω gegeben durch $\Omega = \{1,2,3,4,5,6\}^5 = \big\{(a,b,c,d,e) : a,b,c,d,e \in \{1,2,3,4,5,6\}\big\}$ und somit $|\Omega| = 6^5$. Es sei K das Ereignis "Kniffel" und es sei F das Ereignis "Full House" (wobei, wie oben bemerkt, auch ein "Kniffel" als "Full House" gezählt wird). Dann gelten $|K| = 6$ sowie $|F \backslash K| = \binom{5}{2} \cdot 6 \cdot 5 = 300$, folglich $|F| = |F \backslash K| + |K| = 300 + 6 = 306$, und somit $P(F) = \frac{306}{6^5} = \frac{51}{6^4} = \frac{17}{2 \cdot 6^3} = \frac{17}{432}$.

6. Aufgabe (16 Punkte)
Ich schlage Ihnen das folgende Glücksspiel vor: Sie würfeln mit einem Würfel und ich würfle auch mit einem Würfel. Wenn die Summe der beiden Augenzahlen gerade ist, so erhalten Sie von mir diese Summe. Wenn die Summe der beiden Augenzahlen ungerade ist, so erhalte ich von Ihnen diese Summe. (In diesem Fall verlieren Sie die Summe, d.h. Ihr Gewinn ist dann negativ.) Die Zufallsvariable X beschreibe Ihren Gewinn bei diesem Spiel. Bestimmen Sie den zugrunde liegenden Ergebnisraum Ω, den Wertebereich $X(\Omega)$, die Wahrscheinlichkeiten $P(X = k)$ für alle $k \in X(\Omega)$ sowie den Erwartungswert $E(X)$ und die Varianz $V(X)$. Zu wessen Gunsten ist dieses Spiel oder ist es ein faires Spiel?

Es gilt $\Omega = \big\{(m,n) : m,n \in \{1,2,3,4,5,6\}\big\}$ und für $\omega = (m,n) \in \Omega$ gilt $X(\omega) = m+n$, falls $m+n$ gerade ist, bzw. $X(\omega) = -(m+n)$, falls $m+n$ ungerade ist, und somit also $X(\Omega) = \{-11,-9,-7,-5,-3,2,4,6,8,10,12\}$. Wenn man zählt, wie oft jeder dieser Werte aus $X(\Omega)$ angenommen wird, so findet man die folgenden Wahrscheinlichkeiten

k	-11	-9	-7	-5	-3	2	4	6	8	10	12
$P(X=k)$	$\frac{2}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{6}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{1}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{1}{36}$
k^2	121	81	49	25	9	4	16	36	64	100	144

und hiermit dann

$$E(X) = \sum_{k \in X(\Omega)} kP(X=k)$$
$$= \frac{-11 \cdot 2 - 9 \cdot 4 - 7 \cdot 6 - 5 \cdot 4 - 3 \cdot 2 + 2 \cdot 1 + 4 \cdot 3 + 6 \cdot 5 + 8 \cdot 5 + 10 \cdot 3 + 12 \cdot 1}{36}$$
$$= \frac{-22 - 36 - 42 - 20 - 6 + 2 + 12 + 30 + 40 + 30 + 12}{36} = \frac{-126 + 126}{36} = 0 \quad \text{sowie}$$
$$V(X) = E(X^2) - \big(E(X)\big)^2 = E(X^2) = \sum_{k \in X(\Omega)} k^2 P(X=k)$$
$$= \frac{121 \cdot 2 + 81 \cdot 4 + 49 \cdot 6 + 25 \cdot 4 + 9 \cdot 2 + 4 \cdot 1 + 16 \cdot 3 + 36 \cdot 5 + 64 \cdot 5 + 100 \cdot 3 + 144 \cdot 1}{36}$$
$$= \frac{2\big(121 + 162 + 147 + 50 + 9 + 2 + 24 + 90 + 160 + 150 + 72\big)}{36} = \frac{987}{18} = \frac{329}{6}.$$

Das Spiel ist fair, da $E(X) = 0$.

7. Aufgabe (15 Punkte)
Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, daß man beim Mensch-ärgere-Dich-nicht-Spielen am Anfang genau zweimal eine Drei gewürfelt hat, bevor man seine erste Sechs würfelt?
Hinweis: Für $|x| < 1$ gilt $\sum_{k=0}^{\infty} \binom{k+2}{2} x^k = \left(\frac{1}{1-x}\right)^3$.
Es sei A das Ereignis "genau zweimal eine Drei vor der ersten Sechs" und für $k \geq 1$ sei B_k das Ereignis "erste Sechs im k-ten Wurf". Dann gelten $A \cap B_1 = \emptyset = A \cap B_2$ und daher $A = \cup_{k=3}^{\infty}(A \cap B_k)$, wobei die Vereinigung disjunkt ist, da die B_k disjunkt sind. Desweiteren gelten für $k \geq 3$ dann $P(B_k) = \left(\frac{5}{6}\right)^{k-1}\frac{1}{6}$ sowie $P(A|B_k) = \binom{k-1}{2}\left(\frac{4}{5}\right)^{k-3}\left(\frac{1}{5}\right)^2$ und hiermit erhält man mit Hilfe der Formel für die totale Wahrscheinlichkeit dann

$$P(A) = \sum_{k=3}^{\infty} P(A \cap B_k) = \sum_{k=3}^{\infty} P(A|B_k)P(B_k) = \sum_{k=3}^{\infty} \binom{k-1}{2}\left(\frac{4}{5}\right)^{k-3}\left(\frac{1}{5}\right)^2\left(\frac{5}{6}\right)^{k-1}\frac{1}{6}$$

$$= \left(\frac{1}{6}\right)^3 \sum_{k=3}^{\infty} \binom{k-1}{2}\left(\frac{4}{6}\right)^{k-3} = \left(\frac{1}{6}\right)^3 \sum_{k=0}^{\infty} \binom{k+2}{2}\left(\frac{2}{3}\right)^{k} = \left(\frac{1}{6}\right)^3 \left(\frac{1}{1-\frac{2}{3}}\right)^3 = \left(\frac{1}{2}\right)^3 = \frac{1}{8}\,.$$

Die gesuchte Wahrscheinlichkeit ist also $P(A) = \frac{1}{8}$.

8. Aufgabe (9 Punkte + 16 Punkte)
Finden Sie explizite Lösungsformeln für x_n, wenn x_n durch die folgenden Rekursionen definiert wird:

a) $x_0 = 1$, $x_1 = 2$ und $x_n = x_{n-1} + 6x_{n-2}$ für $n \geq 2$
Das zugehörige charakteristische Polynom $x^2 - x - 6 = (x-3)(x+2)$ hat die beiden einfachen Nullstellen $x = 3$ und $x = -2$. Die allgemeine Lösung der Rekursion $x_n = x_{n-1} + 6x_{n-2}$ für $n \geq 2$ hat folglich die Form $x_n = a \cdot 3^n + b \cdot (-2)^n$ für $n \geq 0$. Im Fall der Anfangbedingungen $x_0 = 1$ und $x_1 = 2$, d.h. $a + b = 1$ und $3a - 2b = 2$, gilt dabei dann $a = \frac{4}{5}$ und $b = \frac{1}{5}$. Die Lösung lautet somit $x_n = \frac{4}{5} \cdot 3^n + \frac{1}{5} \cdot (-2)^n$ für $n \geq 0$.

b) $x_0 = 3$, $x_1 = 4$, $x_2 = 8$ und $x_n = 12x_{n-2} + 16x_{n-3}$ für $n \geq 3$
Das zugehörige charakteristische Polynom $x^3 - 12x - 16$ hat in $x = -2$ eine Nullstelle und dann die Faktorisierung $x^3 - 12x - 16 = (x+2)(x^2 - 2x - 8) = (x-4)(x+2)^2$. Die allgemeine Lösung der Rekursion $x_n = 12x_{n-2} + 16x_{n-3}$ für $n \geq 3$ hat folglich die Form $x_n = a \cdot 4^n + (b + c \cdot n)(-2)^n$ für $n \geq 0$. Im Fall der Anfangbedingungen $x_0 = 3$, $x_1 = 4$ und $x_2 = 8$, d.h. $a + b = 3$, $4a - 2b - 2c = 4$ und $16a + 4b + 8c = 8$, gilt dabei dann $a = 1$, $b = 2$ und $c = -2$. Die Lösung lautet somit $x_n = 4^n + (2 - 2 \cdot n)(-2)^n = 4^n + (n-1)(-2)^{n+1}$ für $n \geq 0$.