KLAUSUR

Analysis
(E-Techniker/Mechatroniker/W-Ingenieure)

10.09.2013

(Hans-Georg Rück)

Name:	Vorname:	Matr.–Nr./Studiengang:	Versuch–Nr.:

Unterschrift:

Für jede Aufgabe gibt es 10 Punkte. Zum Bestehen der Klausur sollten 27 Punkte erreicht werden.

1)	2)	3)	4)	5)	6)

Punkte:	Note:

Fangen Sie für jede Aufgabe ein neues Blatt an.
Beschreiben Sie nur die Vorderseite der Blätter.
Geben Sie alle Rechenschritte an!

Aufgabe 1: a) Berechnen Sie die Grenzwerte der Folgen $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ und $(b_n)_{n=1}^{\infty}$ mit

$$a_n = \frac{7\,n}{\sqrt[3]{27\,n^3 + n^2 + 5}} \text{ und } b_n = \frac{-8\,n^2 + (-1)^n\,n}{2\,n^2 + 3}\,.$$

b) Die Folge $(c_n)_{n=1}^{\infty}$ sei rekursiv definiert durch

$$c_1 = 1\,,\ c_{n+1} = \frac{c_n}{2} + 1\,.$$

Zeigen Sie mit vollständiger Induktion, dass gilt

$$c_n = 2 - \frac{1}{2^{n-1}} \text{ für alle } n \in \mathbb{N}\,.$$

Aufgabe 2: Betrachten Sie die Funktion

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \text{ mit } f(x) = (x-1)\,e^{-\frac{x^2}{2}+x}\,.$$

a) Berechnen Sie alle Nullstellen von f.
b) Berechnen Sie alle lokalen Minima und lokalen Maxima von f.
c) Wie viele Wendepunkte hat f höchstens? Begründen Sie Ihre Antwort!
d) Berechnen Sie die Grenzwerte $\lim_{x\to+\infty} f(x)$ und $\lim_{x\to-\infty} f(x)$.
e) Skizzieren Sie den Graph von f und bestimmen Sie die Wertemenge $\{f(x) \mid x \in \mathbb{R}\}$.

Aufgabe 3: a) Berechnen Sie eine Stammfunktion von

$$f(x) = \frac{2\,x}{x^2 + x - 6}$$

mittels Partialbruchzerlegung.
b) Berechnen Sie (durch Anwendung einer geeigneten Substitution) das bestimmte Integral

$$\int_{\frac{2}{\pi-2}}^{\frac{3}{\pi-3}} \frac{1}{x^2}\,\sin\Big(\frac{x+1}{x}\Big)\,dx\,.$$

Bitte wenden!

Aufgabe 4: a) Berechnen Sie die Taylorreihe von

$$f(x) = \frac{2\,x}{x^2 - 4}$$

um den Punkt $x_0 = 0$. Dabei kann die Partialbruchzerlegung hilfreich sein.

b) Gegeben sei die Funktion $h : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ durch

$$h(x, y) = x^4 + 5\,x^3 y - 3\,x\,y^3 - x\,.$$

Berechnen Sie das Taylorpolynom vom Grad 2 von h um den Punkt$(1, 1)$.

Aufgabe 5: Betrachten Sie die Funktion $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ mit

$$f(x, y) = x^3 + 2\,x^2 + x\,y + \frac{1}{2}\,y^2\,.$$

a) Berechnen Sie alle lokalen Minima und lokalen Maxima von f.
b) Welche Punkte kommen als Extremalstellen von f unter der Nebenbedingung

$$g(x, y) = x^2 - x - y - 1 = 0$$

in Frage?

Aufgabe 6: a) Betrachten Sie im $\mathbb{R}^2$ den Kreisring

$$Kr = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 1 \leq x^2 + y^2 \leq 2\}$$

und berechnen Sie das Integral

$$\int\limits_{Kr} \frac{\cos(\sqrt{x^2 + y^2})}{\sqrt{x^2 + y^2}} d(x, y)\,.$$

b) Berechnen Sie das Volumen der folgenden Teilmenge D des $\mathbb{R}^3$,

$$D = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x \geq 0\,,\ y \geq 0\,,\ z \geq 0\,,\ x + y + z \leq 1\}\,.$$

Lösungsskizze

Aufgabe 1

(a)

$$a_n = \frac{7\,n}{\sqrt[3]{27\,n^3+n^2}+5} = \frac{7}{\sqrt[3]{27+\frac{1}{n}}+\frac{5}{n}} \qquad \Longrightarrow \lim_{n\to+\infty} a_n = \frac{7}{\sqrt[3]{27+0}+0} = \frac{7}{3}\ .$$

$$b_n = \frac{-8\,n^2+(-1)^n\,n}{2\,n^2+3} = \frac{-8+\frac{(-1)^n}{n}}{2+\frac{3}{n^2}} \qquad \Longrightarrow \lim_{n\to+\infty} b_n = \frac{-8+0}{2+0} = -4\ .$$

(b)

$$c_1 = 1, \quad c_{n+1} = \frac{c_n}{2}+1$$

$$n=1: \quad c_1 = 1 = 2-\frac{1}{2^0}, \quad \text{ok}\ .$$

$$n \rightsquigarrow n{+}1: \quad c_{n+1} = \frac{c_n}{2}+1 = \frac{1}{2}\left(2-\frac{1}{2^{n-1}}\right)+1 = 1-\frac{1}{2^n}+1 = 2-\frac{1}{2^{(n+1)-1}} \quad \text{ok}\ .$$

Aufgabe 2

$$f(x) = (x-1)e^{-\frac{x^2}{2}+x}\ .$$

(a) Vorbemerkt: $e^u \neq 0$ für alle $u \in \mathbb{R}$.
Nullstelle: $x = 1$.

(b)

$$f'(x) = 1.e^{-\frac{x^2}{2}+x}+(x-1)e^{-\frac{x^2}{2}+x}(-x+1) = e^{-\frac{x^2}{2}+x}(-x^2+2x-1+1) = x(-x+2)e^{-\frac{x^2}{2}+x}\ .$$

$$f''(x) = (-2x+2)e^{-\frac{x^2}{2}+x}+(-x^2+2x)e^{-\frac{x^2}{2}+x}(-x+1) = (x^3-3x^2+2)e^{-\frac{x^2}{2}+x}\ .$$

$$f'(x) = 0 \Longleftrightarrow x = 0 \quad \text{oder} \quad x = 2\ .$$

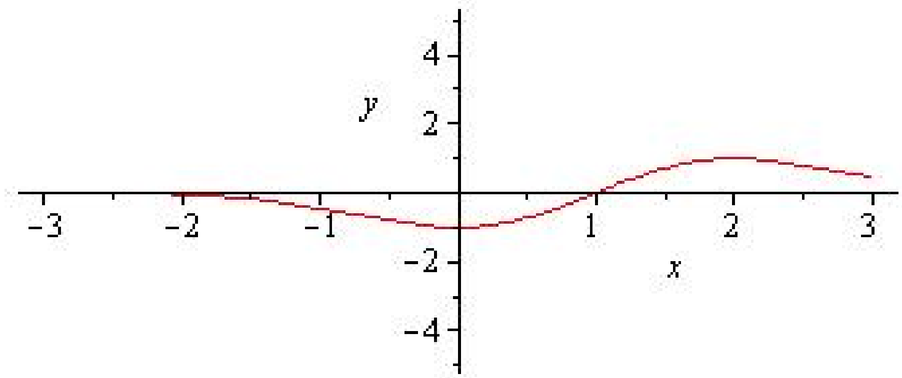
$$f''(0) = e^0\cdot 2 > 0\ . \quad \text{lokales Minimum bei 0}, \quad f(0) = -1\ .$$

$$f''(2) = (8-12+2)e^{\cdot\cdot} < 0\ . \quad \text{lokales Maximum bei 2}, \quad f(2) = 1\ .$$

(c) Wendepunkte: Höchstens Nullstellen von x^3-3x^2+2, also höchstens 3 .
(Skizze zeigt später, dass es wirklich 3 sind!)

(d)

$$\lim_{n\to\pm\infty} e^{-\frac{x^2}{2}+x}(x-1) = \lim_{n\to\pm\infty} \frac{x-1}{e^{\frac{x^2}{2}-x}} = \frac{1}{\infty} = 0\ . \quad \text{(L'Hospital)}$$



(e)

Hieraus sieht man, dass $\{f(x)|x \in \mathbb{R}\} = [-1, 1]$

Aufgabe 3

(a)

$$\frac{2x}{x^2+x-6} = \frac{2x}{(x+3)(x-2)} = \frac{A}{x+3} + \frac{B}{x-2}\ .$$

somit $\quad 2x = A(x-2)+B(x+3), \quad A+B = 2, \quad -2A+3B = 0.$ also $\quad A = \dfrac{6}{5}, B = \dfrac{4}{5}$.

$$\Longrightarrow \frac{2x}{x^2+x-6} = \frac{\frac{6}{5}}{x+3} + \frac{\frac{4}{5}}{x-2}\ .$$

Stammfunktion von $f(x)$: $\frac{6}{5}\ln|x+3| + \frac{4}{5}\ln|x-2|$.

(b)

$$\int_{\frac{2}{\pi-2}}^{\frac{3}{\pi-3}} \frac{1}{x^2}\,\sin\left(\frac{x+1}{x}\right)dx$$

Substituiere $\frac{x+1}{x} = 1+\frac{1}{x} = u$, dann $du = -\frac{1}{x^2}dx$. $\quad u_{oben} = 1+\frac{\pi-3}{3} = \frac{\pi}{3}$.
$u_{unten} = 1+\frac{\pi-2}{2} = \frac{\pi}{2}$.

$$\int_{\frac{2}{\pi-2}}^{\frac{3}{\pi-3}} \frac{1}{x^2}\,\sin\left(\frac{x+1}{x}\right)dx = \int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{3}} -\sin(u)du = [\cos(u)]_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{3}} = \frac{1}{2} - 0 = \frac{1}{2}\ .$$

Aufgabe 4

(a)

$$\frac{2x}{x^2-4} = \frac{2x}{(x-2)(x+2)} = \frac{A}{x-2} + \frac{B}{x+2} \ .$$

Wie in der Aufgabe 3-a) man hat $A = B = 1$.

$$\Longrightarrow \frac{2x}{x^2-4} = \frac{1}{x-2} + \frac{1}{x+2} = -\frac{1}{2}\left(\frac{1}{1-\frac{x}{2}}\right) + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{1-(\frac{-x}{2})}\right) = -\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}(\frac{x}{2})^n + \frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}(\frac{-x}{2})^n$$

$$= -\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{2^n}x^n + \frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}(\frac{-1}{2})^n x^n = \sum_{n=0}^{\infty}(-\frac{1}{2}\frac{1}{2^n} + \frac{1}{2}(\frac{-1}{2})^n)x^n$$

(b)

$$h(x,y) = x^4 + 5\,x^3 y - 3\,x\,y^3 - x \ .$$

$$\frac{\partial h}{\partial x} = 4x^3 + 15x^2 y - 3y^3 - 1 \ , \quad \frac{\partial h}{\partial y} = 5x^3 - 9xy^2 \ , \quad \frac{\partial^2 h}{\partial x^2} = 12x^2 + 30xy,$$

$$\frac{\partial^2 h}{\partial x \partial y} = 15x^2 - 9y^2, \quad \frac{\partial^2 h}{\partial y^2} = -18xy \ .$$

Jetzt einsetzen

$$\frac{\partial h}{\partial x}(1,1) = 15 \ , \quad \frac{\partial h}{\partial y}(1,1) = -4 \ , \quad \frac{\partial^2 h}{\partial x^2}(1,1) = 42 \ , \quad \frac{\partial^2 h}{\partial x \partial y}(1,1) = 6 \ , \quad \frac{\partial^2 h}{\partial y^2}(1,1) = -18 \ .$$

$$\Longrightarrow T_2(f,(x,y),(1,1)) = 2 + 15(x-1) - 4(y-1) + \frac{1}{2}(42(x-1)^2 + 2.6(x-1)(y-1) - 18(y-1)^2) \ .$$

Man kann weiter ausrechnen!
Alternative: Setze $x - 1 = u$, $y - 1 = v$, dann

$$h(x,y) = x^4 + 5x^3 y - 3xy^3 - x = (u+1)^4 + 5(u+1)^3(v+1) - 3(u+1)(v+1)^3 - (u+1)$$

$$= u^4 + 4u^3 + 6u^2 + 4u + 1 + 5u^3 + 15u^2 + 15u + 5 + 5u^3 v + 15u^2 v$$

$$+15uv + 5v - 3v^3 - 9v^2 - 9v - 3 - 3v^3 u - 9v^2 u - 9vu - 3u - u - 1$$

$$\Longrightarrow h(u,v) = 2 + 15u - 4v + 21u^2 + 6uv - 9v^2 + \quad \text{höhere Terme}$$

Aufgabe 5

(a)

$$f(x,y) = x^3 + 2x^2 + xy + \frac{1}{2}y^2 \ .$$

$$\text{Grad} f(x,y) = (3x^2+4x+y, x+y) \quad \text{und} \quad H_f(x,y) = \begin{pmatrix} 6x+4 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \ .$$

Notwendige Bedingung:

$$\text{Grad} f(x,y) = 0 \Longleftrightarrow x+y=0 \quad \text{und} \quad 3x^2+4x+y=0 \ .$$

$x+y=0 \Longleftrightarrow y=-x.$ $3x^2+4x+y = 3x^2+3x = 0 \Longrightarrow x = 0$ und $y=0$, oder $x=-1$ und $y=1$.

$H_f(0,0) = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$, $\det(H_f(0,0)) = 3 > 0$ und $4 > 0$ also locales Minimum bei (0,0)

$H_f(-1,1) = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$, $\det(H_f(-1,1)) = -3 < 0$ also Sattelpunkt bei (-1,1) .

(b) Lagrange Ansatz:

$$\text{Grad} f(x,y) = (3x^2+4x+y, x+y) \ , \quad \text{Grad} g(x,y) = (2x-1,-1)$$

Löse: $g(x,y) = x^2-x-y-1 = 0$ und $(3x^2+4x+y, x+y) + \lambda(2x-1,-1) = 0$. Man erhält die 3 Gleichungen:

$$\begin{array}{lrcl} (1) & x^2-x-y-1 & = & 0 \\ (2) & 3x^2+4x+y+\lambda(2x-1) & = & 0 \\ (3) & x+y-\lambda & = & 0 \end{array}$$

(3) $\lambda = x+y$. (1) $y = x^2-x-1$, also $\lambda = x^2-1$. in (2)

$$\begin{aligned} 3x^2+4x+x^2-x-1+(x^2-1)(2x-1) &= 0 \\ \Longleftrightarrow 2x^3+3x^2+x &= 0 \end{aligned}$$

Lösungen: $x=0$, $2x^2+3x+1=0 \Longleftrightarrow x^2+\frac{3}{2}x+\frac{1}{2}=0 \Longrightarrow x_{2/3} = -\frac{3}{4} \pm \sqrt{\frac{9}{16}-\frac{8}{16}} \Longleftrightarrow x = -\frac{1}{2}$ oder $x=-1$.
Es ergibt 3 Punkte $(0,-1)$, $(-\frac{1}{2},-\frac{1}{4})$ und $(-1,1)$.
Alternative: Löse $g(x,y)$ auf $y = x^2-x-1$, setze in f ein und leite ab ....

Aufgabe 6

(a) Polarkoordinaten $(x,y) = (r\cos(\varphi), r\sin(\varphi))$

$$\int \frac{\cos(\sqrt{x^2+y^2})}{\sqrt{x^2+y^2}} dxdy = \int_0^{2\pi} \int_1^{\sqrt{2}} \frac{\cos(r)}{r} r dr d\varphi = \int_0^{2\pi} \left(\int_1^{\sqrt{2}} \cos(r) dr \right) d\varphi = 2\pi(\sin(\sqrt{2}) - \sin(1))$$

(b)

$$\int_0^1 \int_0^{1-x} \int_0^{1-x-y} 1 \quad dzdydx = \int_0^1 \int_0^{1-x} (1-x-y) dydx = \int_0^1 \left[(1-x)y - \frac{y^2}{2} \right]_0^{1-x} dx$$

$$= \int_0^1 \left((1-x)^2 - \frac{(1-x)^2}{2} \right) dx = \frac{1}{2} \int_0^1 (1-x)^2 dx = \frac{1}{2} \left[\frac{1}{3}(x-1)^3 \right]_0^1 = \frac{1}{6} \, .$$