KLAUSUR

Analysis
(E-Techniker/Mechatroniker/W-Ingenieure)

9.9.2014

(W. Strampp)

Name:	Vorname:	Matr.-Nr./Studiengang:	Versuch-Nr.:

Unterschrift:

Für jede Aufgabe gibt es 10 Punkte. Zum Bestehen der Klausur sind 27 Punkte erforderlich.

1)	2)	3)	4)	5)	6)

Punkte:	Note:

Fangen Sie für jede Aufgabe ein neues Blatt an.
Beschreiben Sie nur die Vorderseite der Blätter.
Geben Sie alle Rechenschritte an!

1. (a) Berechnen Sie den Grenzwert der Folgen:

$$a_n = \frac{\sin(n^2) + 3\,n}{n+1}\,,\; b_n = \frac{2^{n-1} - 1}{2^{n-2}}\,,\; n \in \mathbb{N}\,.$$

   (b) Die Folge c_n wird gegeben durch die Rekursion:

$$c_1 = 1\,, c_{n+1} = q\,\sqrt{c_n}\,, q \in \mathbb{R}_{>0}\,.$$

   Zeigen Sie durch vollständige Induktion für $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$: $c_n = q^{b_n}$.

2. (a) Berechnen Sie folgende Grenzwerte:

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin(2\,x)}{\tan(3\,x)}\,, \quad \lim_{x \to 0} \frac{e^x - x - 1}{x\,e^x - x}\,.$$

   (b) Gegeben ist die Funktion $f(x) = \ln(e^x - 1)\,, x \in \mathbb{R}_{>0}$.
   Zeigen Sie, dass f streng monoton wachsend ist.
   Geben Sie den Wertebereich von f an, und berechnen Sie die Umkehrfunktion f^{-1}.

3. (a) Gegeben ist die Funktion: $f(x) = x\,e^{-x^2}$.
   Besitzt f Extremalstellen?
   Berechnen Sie die Taylorreihe um den Punkt $x_0 = 0$ der Funktion f.
   (Hinweis: Beginnen Sie mit der Exponentialreihe $e^x = \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{x^\nu}{\nu!}$).

   (b) Berechnen Sie folgende Integrale:

$$\int \frac{e^x}{e^x + e^{-x}}\,dx\,, \text{(substituieren Sie } t = e^x)\,, \int \frac{x-3}{(x-1)\,(x-2)}\,dx\,.$$

Bitte wenden!

4. (a) Berechnen Sie den Konvergenzradius ρ der Potenzreihe

$$\sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{3^\nu}{\nu}\, x^\nu \,.$$

Konvergiert die Reihe für $x = \frac{1}{3}$?

(b) Geben Sie das Taylorpolynom vom Grad 3 der Funktion

$$f(x,y) = \frac{1}{(1-3\,x)\,(1-2\,y)}$$

um $(x_0, y_0) = (0,0)$ an. (Hinweis: Geometrische Reihe benutzen).

5. Gegeben ist die Funktion

$$f(x,y) = 2\,x^2 - 3\,x\,y + 2\,y^2 \,.$$

(a) Besitzt f Extremalstellen?
(b) Welche Punkte kommen als Extremalstellen von f unter der folgenden Nebenbedingung infrage

$$g(x,y) = x^2 + y^2 = 1?$$

6. (a) Berechnen Sie das Integral

$$\int_D x\, d(x,y)$$

über den Bereich $D \subset \mathbb{R}^2$, der durch folgende Ungleichungen beschrieben wird: $0 \leq x \leq 1\,, 0 \leq y \leq -3\,x + 3\,.$

(b) Berechnen Sie das Integral

$$\int_D y\, d(x,y)$$

über den Bereich $D \subset \mathbb{R}^2$, der durch folgende Ungleichungen beschrieben wird: $1 \leq \sqrt{x^2+y^2} \leq 2\,, x \geq 0\,.$
(Hinweis: Polarkoordinaten, Funktionaldeterminante$=r$).

Lösungen:

1.a)

$$a_n = \frac{\sin(n^2) + 3\,n}{n+1} = \frac{\frac{\sin(n^2)}{n} + 3}{1 + \frac{1}{n}}\,,$$

$$\left|\frac{\sin(n^2)}{n}\right| \le \frac{1}{n}\,,\, \lim_{n\to\infty} \frac{\sin(n^2)}{n} = 0\,,$$

$$\lim_{n\to\infty} a_n = 3\,.$$

$$b_n = \frac{2^{n-1} - 1}{2^{n-2}} = \frac{2^{-1}\,2^n - 1}{2^{-2}\,2^n} = \frac{2^{-1} - \left(\frac{1}{2}\right)^n}{2^{-2}}\,,$$

$$\lim_{n\to\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n = 0\,,$$

$$\lim_{n\to\infty} b_n = 2\,.$$

1.b)
Ind. Anf.: $c_1 = 1\,, c_2 = q\,\sqrt{1} = q^1\,, b_2 = \frac{2^{2-1}-1}{2^{2-2}} = 1\,.$

Ind. Ann.: Für ein $n \ge 2$ gelte: $c_n = q^{b_n}$.

Ind. Schluss:

$$c_{n+1} = q\,c_n^{\frac{1}{2}} = q\,q^{\frac{b_n}{2}} = q^{1+\frac{b_n}{2}}\,,$$

$$1 + \frac{b_n}{2} = \frac{2^{n-1} + 2^{n-1} - 1}{2^{n-1}} = \frac{2^n - 1}{2^{n-1}} = b_{n+1}\,,$$

$$c_{n+1} = q^{b_{n+1}}\,.$$

2.a)

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin(2\,x)}{\tan(3\,x)}=\lim_{x\to 0}\frac{2\,\cos(2\,x)}{3\,(1+(\tan(3\,x))^2)}=\frac{2}{3}\,,$$

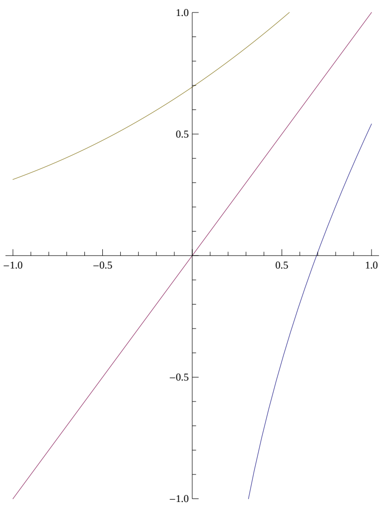
$$\lim_{x\to 0}\frac{e^x-x-1}{x\,e^x-x}=\lim_{x\to 0}\frac{e^x-1}{x\,e^x+e^x-1}=\lim_{x\to 0}\frac{e^x}{x\,e^x+2\,e^x}=\frac{1}{2}\,.$$

2.b) e^x, $x>0$, nimmt alle Werte $y>1$ an.
e^x-1, $x>0$, nimmt alle Werte $y>0$ an.
Wertebereich des Logarithmus ist $\mathbb{R}$.
Wertebereich von $f(x)=\ln(e^x-1)$ ist $\mathbb{R}$.

$$f'(x)=\frac{e^x}{e^x-1}\,,$$

$x>0:\ e^x>1\,,e^x-1>0$, $f'(x)>0$, also f streng monoton wachsend.
Umkehrfunktion:

$$\ln(e^x-1)=y$$
$$e^x-1=e^y$$
$$e^x=e^y+1$$
$$x=\ln(e^y+1)$$
$$f^{-1}(x)=\ln(e^x+1)\,.$$



Die Funktion $f(x)=\ln(e^x-1)$ und die Umkehrfunktion $f^{-1}(x)=\ln(e^y+1)$

3.a)

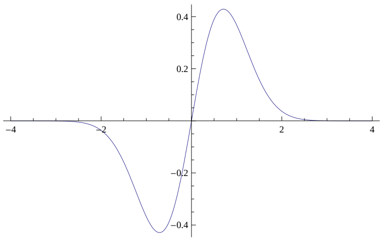
$$f(x) = x\,e^{-x^2}\,, \quad f'(x) = (1 - 2\,x^2)\,e^{-x^2}\,,$$

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = \pm\frac{\sqrt{2}}{2}\,.$$

$$f''(x) = (-4\,x + (1 - 2\,x^2)\,(-2\,x))\,e^{-x^2} = 2\,x\,(-3 + 2\,x^2)\,e^{-x^2}\,,$$

$$f''\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) > 0\,, \text{Minimum}\,, \quad f''\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) < 0\,, \text{Maximum}\,,$$

$$f(x) = x\,\sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{(-x^2)^\nu}{\nu!} = \sum_{\nu=0}^{\infty}(-1)^\nu\,\frac{x^{2\,\nu+1}}{\nu!}\,.$$



Die Funktion $f(x) = x\,e^{-x^2}$

3.b)

Substitution:

$$t = e^x\,, x = \ln(t)\,, \frac{dx}{dt} = \frac{1}{t}\,,$$

$$\int \frac{e^x}{e^x + e^{-x}}\,dx = \left(\int \frac{t}{t + \frac{1}{t}}\,\frac{1}{t}\,dt\right)_{t=e^x} = \left(\int \frac{t}{t^2 + 1}\,dt\right)_{t=e^x}\,,$$

$$\int \frac{e^x}{e^x + e^{-x}}\,dx = \frac{1}{2}\,\left(\int \frac{2\,t}{t^2 + 1}\,dt\right)_{t=e^x} = \frac{1}{2}\,\ln(t^2{+}1)_{t=e^x}{+}c = \frac{1}{2}\,\ln(e^{2\,x}{+}1){+}c\,.$$

Partialbruchzerlegung:

$$\frac{x - 3}{(x - 1)\,(x - 2)} = \frac{a}{x - 1} + \frac{b}{x - 2} = \frac{a\,(x - 2) + b\,(x - 1)}{(x - 1)\,(x - 2)} = \frac{(a + b)\,x - 2\,a - b}{(x - 1)\,(x - 2)}\,,$$

$$a + b = 1\,, \quad -2\,a - b = -3\,,$$

$$a = 2\,, b = -1\,,$$

$$\int \frac{x - 3}{(x - 1)\,(x - 2)}\,dx = 2\,\ln(|x - 1|) - \ln(|x - 2|) + c\,.$$

4.a)

$$a_\nu = \frac{3^\nu}{\nu}\,, \quad a_{\nu+1} = \frac{3^{\nu+1}}{\nu+1}\,,$$

$$\lim_{\nu\to\infty}\left|\frac{a_{\nu+1}}{a_\nu}\right| = \lim_{\nu\to\infty}\frac{3\,\nu}{\nu+1} = 3\,.$$

$$\rho = \frac{1}{3}\,.$$

Alternative:

$$\lim_{\nu\to\infty}\sqrt[\nu]{|a_\nu|} = \lim_{\nu\to\infty}\frac{3}{\sqrt[\nu]{\nu}} = 3\,.$$

$x = \frac{1}{3}$:

$$\sum_{\nu=1}^{\infty}\frac{3^\nu}{\nu}\left(\frac{1}{3}\right)^\nu = \sum_{\nu=1}^{\infty}\frac{1}{\nu}\,.$$

Harmonische Reihe. Divergenz.

4.b)

$$\begin{aligned} f(x,y) &= \left(\sum_{\nu=0}^{\infty}3^\nu\,x^\nu\right)\left(\sum_{\mu=0}^{\infty}2^\mu\,y^\mu\right) \\ &= (1+3\,x+9\,x^2+27\,x^3+81\,x^4+\cdots) \\ &\quad\;(1+2\,y+4\,y^2+8\,y^3+16\,y^4+\cdots) \\ &= \sum_{\nu=0}^{\infty}\left(\sum_{\mu=0}^{\nu}3^\mu\,2^{\nu-\mu}\,x^\mu\,y^{\nu-\mu}\right)\,,|x|<\frac{1}{3}\,,|y|<\frac{1}{2}\,. \end{aligned}$$

$T_3(f,(x,y),(0,0) = 1{+}3\,x{+}2\,y{+}9\,x^2{+}6\,x\,y{+}4\,y^2{+}27\,x^3{+}18\,x^2\,y{+}12\,x\,y^2{+}8\,y^3\,.$

Alternative:

$$\begin{aligned} f(x,y) &= \frac{1}{1-(3\,x+2\,y-6\,x\,y)} = \sum_{\nu=0}^{\infty}(3\,x+2\,y-6\,x\,y)^\nu \\ &= 1+(3\,x+2\,y-6\,x\,y)+(3\,x+2\,y-6\,x\,y)^2+(3\,x+2\,y-6\,x\,y)^3+\cdots\,. \end{aligned}$$

Alternative: partielle Ableitungen bis zur Ordnung 3 berechnen, an der Stelle $(0,0)$ auswerten und Taylorpolynom aufstellen.

5.a)

$$\text{grad} f(x,y) = (4\,x - 3\,y, -3\,x + 4\,y)\,.$$

$$\text{grad} f(x,y) = (0,0) \iff (x,y) = (0,0)\,.$$

$$H(x,y) = \begin{pmatrix} 4 & -3 \\ -3 & 4 \end{pmatrix}$$

$$\det H(0,0) = 7$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(0,0) = 4\,, \quad \text{Minimum}\,.$$

5.b)

$$(1)\ x^2 + y^2 = 1\,, \quad (2)\ 4\,x - 3\,y + \lambda\,2\,x = 0\,, \quad (3)\ -3\,x + 4\,y + \lambda\,2\,y = 0\,.$$

Wäre $x = 0$, so ergäbe sich aus (2) $y = 0$ im Widerspruch zu (1). Wäre $y = 0$, so ergäbe sich aus (3) $x = 0$ im Widerspruch zu (1). Der Nullpunkt kommt also nicht infrage. Wir multiplizieren (2) mit y und (3) mit x:

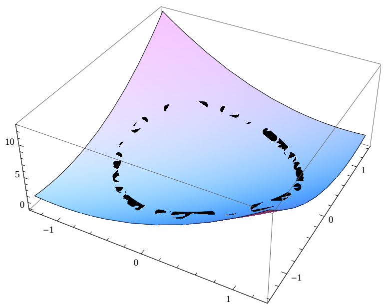
$$4\,x\,y - 3\,y^2 + \lambda\,2\,x\,y = 0\,, \quad -3\,x^2 + 4\,x\,y + \lambda\,2\,x\,y = 0\,,$$

bzw.

$$3\,x^2 = 3\,y^2\,.$$

Hieraus folgt $y = \pm x$ und $2\,y^2 = 1$. Als Extremalstellen von f unter $g(x,y) = 1$ kommen also folgende Punkte infrage:

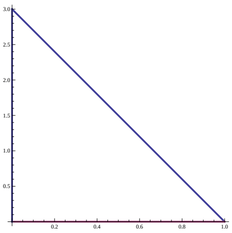
$$\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right), \quad \left(\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}\right), \quad \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right), \quad \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}\right).$$



Die Funktion $f(x,y) = 2\,x^2 - 3\,x\,y + 2\,y^2$ unter der Nebenbedingung $x^2 + y^2 = 1$

6.a)

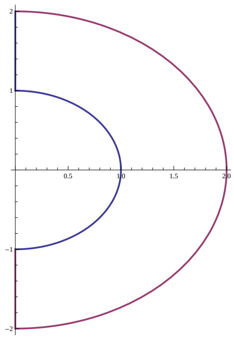
$$
\begin{aligned}
\int_D x\,d(x,y) &= \int_0^1 \left(\int_0^{-3x+3} x\,dy \right) dx \\
&= \int_0^1 (x\,y)\big|_{y=0}^{y=-3x+3}\,dx = \int_0^1 x\,(-3\,x+3)\,dx \\
&= \int_0^1 (-3\,x^2+3\,x)\,dx = \left(-x^3+\frac{3}{2}\,x^2\right)\Big|_{x=0}^{x=1} = \frac{1}{2}\,.
\end{aligned}
$$



Der Integrationsbereich

6.b)

$$
\begin{aligned}
\int_D y\,d(x,y) &= \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \left(\int_1^2 r^2\,\sin(\phi)\,dr \right) d\phi = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \left(\frac{r^3}{3}\,\sin(\phi) \right)_{r=1}^{r=2} d\phi \\
&= \frac{7}{3} \left(\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \sin(\phi)\,d\phi \right) = \frac{7}{3}\,\left(-\cos(\phi)\right)_{\phi=-\frac{\pi}{2}}^{\phi=\frac{\pi}{2}} = 0
\end{aligned}
$$



Der Integrationsbereich