KLAUSUR

Analysis
(E-Techniker/Mechatroniker/W-Ingenieure)

08.09.2015

(W. Koepf)

Name:	Vorname:	Matr.–Nr./Studiengang:	Versuch–Nr.:

Unterschrift:

Für jede Aufgabe gibt es 10 Punkte. Zum Bestehen der Klausur sollten 27 Punkte erreicht werden.

1)	2)	3)	4)	5)	6)

Punkte:	Note:

Fangen Sie für jede Aufgabe ein neues Blatt an.
Beschreiben Sie nur die Vorderseite der Blätter.
Geben Sie alle Rechenschritte an!

Aufgabe 1:

(a) Berechnen Sie die Grenzwerte der Folgen:

$$a_n = \frac{n^2 - (-1)^n}{\sqrt{3n^4 + 3}}, \quad b_n = \sqrt{n^2 + 3n + 1} - \sqrt{n^2 - 1},\ n \in \mathbb{N}.$$

(b) Zeigen Sie mit vollständiger Induktion, dass gilt:

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)} = \frac{n}{n+1} \text{ für alle } n \in \mathbb{N}.$$

Aufgabe 2:
Sei $a > 0$ ein reeller Parameter und eine Funktion $f_a : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definiert durch

$$f_a(x) = x^2 e^{a-x}.$$

(a) Berechnen Sie die Nullstellen von f_a.

(b) Berechnen Sie alle lokalen Extremstellen von f_a und geben Sie jeweils an, ob es sich um ein lokales Maximum oder Minimum handelt.

(c) Berechnen Sie die Wendepunkte von f_a.

(d) Berechnen Sie die Grenzwerte $\lim\limits_{x \to +\infty} f_a(x)$ und $\lim\limits_{x \to -\infty} f_a(x)$.

Aufgabe 3:

(a) Berechnen Sie die Taylorreihe der Funktion $f(x) = \dfrac{\ln(1+x) - x}{x^2}$ um den Punkt $x_0 = 0$ unter Verwendung der Taylorreihe: $\ln(1+x) = \sum\limits_{k=1}^{\infty} \dfrac{(-1)^{k+1}}{k} x^k$.

(b) Berechnen Sie folgende Integrale:

$$I_1 = \int \frac{\sin(x)}{1 + (\cos(x))^2} dx, \qquad I_2 = \int_1^{\infty} e^{-x}(x-1)\, dx.$$

Hinweis: Man verwende für I_1 die Substitution: $t = \cos(x)$.

Bitte wenden!

Aufgabe 4:

(a) Berechnen Sie den Konvergenzradius der Reihe

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(x-1)^k}{k2^{k+1} - 2^k}.$$

Konvergiert die Reihe für $x = -1$?

(b) Geben Sie das Taylorpolynom vom Grad 3 der Funktion:

$$f(x,y) = \frac{\cos(x)}{2+3y}, \quad \text{wobei } \cos(x) = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k)!}.$$

Aufgabe 5:

Betrachten Sie die Funktion $f(x,y) = xy - 2x^2 - 2y^2 - 1$.

(a) Berechnen Sie alle lokalen Minima und lokalen Maxima von f.

(b) Welche Punkte kommen als Extremstellen von f unter der Nebenbedingung $g(x,y) = 3 - x^2 - y^2 = 0$ infrage? Was stellt die Nebenbedingung geometrisch dar?

Aufgabe 6:

(a) Gegeben ist das Doppelintegral $\displaystyle\int_{x=0}^{\ln(3)} \int_{y=e^x}^{3} f(x,y)\, dydx$.

Skizzieren Sie den Integrationsbereich. Vertauschen Sie die Integrationsreihenfolge, stellen Sie also das Integral in der Form: $\displaystyle\int_{y=a}^{b} \int_{x=\varphi(y)}^{\psi(y)} f(x,y)\, dxdy$

dar.

(b) Bestimmen Sie den Wert des Integrals

$$\int_K \frac{xyz}{x^2+y^2}\, d(x,y,z),$$

wobei K die folgende <u>Achtelkugel</u> um den Ursprung mit Radius $R = 3$ sei:

$$K := \{(x,y,z) \mid x^2 + y^2 + z^2 \le 9, x, y, z \ge 0\}.$$

Hinweis: Kugelkoordinaten: $x = r\cos(\phi)\sin(\theta), y = r\sin(\phi)\sin(\theta), z = r\cos(\theta)$ und Funktionaldeterminante $= r^2\sin(\theta)$.

Lösungsskizze

Aufgabe 1 **[5P + 5P]**

(a)

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \frac{n^2(1-\frac{(-1)^n)}{n^2})}{n^2(\sqrt{3+\frac{3}{n^2}})} = \frac{1}{\sqrt{3}}.$$

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty} b_n &= \lim_{n\to\infty} \frac{(\sqrt{n^2+3n+1}-\sqrt{n^2-1})(\sqrt{n^2+3n+1}+\sqrt{n^2-1})}{\sqrt{n^2+3n+1}+\sqrt{n^2-1}} \\
&= \lim_{n\to\infty} \frac{n^2+3n+1-n^2+1}{\sqrt{n^2+3n+1}+\sqrt{n^2-1}} \\
&= \lim_{n\to\infty} \frac{3n+2}{\sqrt{n^2+3n+1}+\sqrt{n^2-1}} \\
&= \lim_{n\to\infty} \frac{n\,(3+\frac{2}{n})}{n\,(\sqrt{1+\frac{3}{n}+\frac{1}{n^2}}+\sqrt{1-\frac{1}{n^2}})} = \frac{3}{2}
\end{aligned}$$

(b) **1- Induktionsanfang:**

$$\sum_{k=1}^{1} \frac{1}{k(k+1)} = \frac{1}{2} = \frac{1}{1+1}.$$

2- Induktionsschritt:

Vorraussetzung:

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)} = \frac{n}{n+1} \text{ gilt für ein } n \in \mathbb{N}$$

Behauptung:

$$\sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{k(k+1)} = \frac{n+1}{n+2}.$$

Beweis:

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{k(k+1)} &= \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)} + \frac{1}{(n+1)(n+2)} \\
&= \frac{n}{n+1} + \frac{1}{(n+1)(n+2)} \\
&= \frac{n(n+2)+1}{(n+1)(n+2)} \\
&= \frac{n^2+2n+1}{(n+1)(n+2)} = \frac{n+1}{n+2}.
\end{aligned}$$

Aufgabe 2 **[1P + 4P + 2P + 3P]**

(a)

$$f_a(x) = 0 \Leftrightarrow x^2 e^{a-x} = 0 \Leftrightarrow x = 0, \text{ da } e^{a-x} > 0.$$

(b)

$$\begin{aligned}
f_a'(x) &= 2xe^{a-x} - x^2 e^{a-x} = x(2-x)e^{a-x}. \\
f_a''(x) &= (2-2x)e^{a-x} - (2x - x^2)e^{a-x} = (x^2 - 4x + 2)e^{a-x}.
\end{aligned}$$

Extremstellen:

$$f_a'(x) = 0 \Leftrightarrow x(2-x)e^{a-x} = 0 \Leftrightarrow x(2-x) = \Leftrightarrow x = 0 \quad \text{oder} \quad x = 2.$$

$$f_a''(0) > 0, \ \textbf{Minimum}, \quad f_a''(2) < 0, \ \textbf{Maximum}.$$

(c)

$$f_a'''(x) = (-x^2 + 6x - 6)e^{a-x}.$$

Wendepunkte:

$$f_a''(x) = 0 \Leftrightarrow (x^2 - 4x + 2)e^{a-x} = 0 \Leftrightarrow (x^2 - 4x + 2) = 0 \Leftrightarrow x = 2 \pm \sqrt{2},$$

wobei $f_a'''(x)(2 \pm \sqrt{2}) \neq 0$.

(d)

$$\lim_{x\to-\infty} x^2 e^{a-x} = (\infty\cdot\infty) = \infty.$$

$$\begin{aligned}\lim_{x\to\infty} x^2 e^{a-x} = (\infty\cdot 0) &= \lim_{x\to\infty}\frac{x^2}{e^{x-a}} = \frac{\infty}{\infty} \quad \text{L'hospital}\\ &= \lim_{x\to\infty}\frac{2x}{e^{x-a}} = \frac{\infty}{\infty} \quad \text{l'Hospital}\\ &= \lim_{x\to\infty}\frac{2}{e^{x-a}} = 0.\end{aligned}$$

Aufgabe 3 **[4P + 3P + 3P]**

(a)

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{\ln(1+x)-x}{x^2} = \frac{1}{x^2}\Big(-x+\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^{k+1}}{k}x^k\Big)\\ &= \frac{1}{x^2}\Big(-x+x+\sum_{k=2}^{\infty}\frac{(-1)^{k+1}}{k}x^k\Big)\\ &= \frac{1}{x^2}\sum_{k=2}^{\infty}\frac{(-1)^{k+1}}{k}x^k\\ &= \sum_{k=2}^{\infty}\frac{(-1)^{k+1}}{k}x^{k-2}\\ &= \sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^{k+1}}{k+2}x^k \quad \text{(optional).}\end{aligned}$$

(b) (i) **Substitution:**

$$t=\cos(x), \quad \frac{dt}{dx} = -\sin(x) \Rightarrow dx = -\frac{dt}{\sin(x)}.$$

$$\begin{aligned} I_1 &= \int \frac{\sin(x)}{1+(\cos(x))^2}dx = \Big(-\int\frac{1}{1+t^2}dt\Big)_{t=\cos(x)}\\ &= -\arctan(\cos(x)) + C.\end{aligned}$$

(ii) **Partielle Integration** mit

$$f^{'}(x) = e^{-x} \text{ und } g(x) = x - 1$$

liefert

$$\int e^{-x}(x-1)dx = [-e^{-x}(x-1) + \int e^{-x}dx] = -xe^{-x}.$$

also ist

$$\int\limits_1^\infty e^{-x}(x-1)dx = -\lim_{x\to\infty}\frac{x}{e^x} + \frac{1}{e} = \frac{1}{e},$$

da $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x}{e^x} = 0$.

Aufgabe 4 **[6P + 4P]**

(a) Wir berechnen den Konvergenzradius ρ mit Hilfe des Quotientenkriteriums. Mit Koeffizienten $a_k = \dfrac{1}{k2^{k+1} - 2^k}$ ergibt sich

$$\lim_{k\to\infty}\left|\frac{a_{k+1}}{a_k}\right| = \lim_{k\to\infty}\frac{k2^{k+1}-2^k}{(k+1)2^{k+2} - 2^(k+1)} = \lim_{k\to\infty}\frac{2k-1}{4(k+1)-2} = \frac{1}{2}.$$

Der Konvergenzradius ist $\rho = 2$.
Für $x = -1$ ergibt sich die Reihe

$$\sum_{k=1}^\infty \frac{(-2)^k}{k2^{k+1}-2^k} = \sum_{k=1}^\infty (-1)^k\frac{1}{2k-1}.$$

Diese Reihe ist eine alternierende Reihe. Sie konvergiert nach dem Leibniz-Kriterium, da $\dfrac{1}{2k-1}$ eine monotone fallende Nullfolge ist.

(b)

$$\begin{aligned}
f(x,y) &= \cos(x)\frac{1}{2+3y} \\
&= \frac{1}{2}\cos(x)\frac{1}{1+\frac{3}{2}y} \\
&= \frac{1}{2}\Big(1 - \frac{x^2}{2} + \ldots\Big)\Big(1 + \frac{3}{2}y + \frac{9}{4}y^2 + \frac{27}{8}y^3 + \ldots\Big) \\
&= \frac{1}{2}\Big[\Big(1 + \frac{3}{2}y + \frac{9}{4}y^2 + \frac{27}{8}y^3\Big) - \Big(\frac{x^2}{2} + \frac{3}{4}x^2y\Big)\Big] \\
&= \frac{1}{2}\Big(\frac{27}{8}y^3 - \frac{3}{4}x^2y - \frac{x^2}{2} + \frac{9}{4}y^2 + \frac{3}{2}y + 1\Big).
\end{aligned}$$

Aufgabe 5 **[5P + 5P]**

(a) Wir haben grad $f(x,y) = (y-4x, x-4y)$. Als notwendige Bedingung für eine Extremstelle haben wir grad $f(x,y) = \vec{0}$, also

$$\begin{aligned} y-4x &= 0 \\ x-4y &= 0 \end{aligned}$$

mit dem Punkt $(0,0)$ als einziger Lösung. Die Hesse-Matrix von f ist

$$H = \begin{pmatrix} -4 & 1 \\ 1 & -4 \end{pmatrix}.$$

Da $\det H = 15 > 0$ und $f_{xx}(0,0) = -4 < 0$, liegt in $(0,0)$ ein Maximum vor.

(b) eine Extremstelle unter der nebenbedingung $g(x,y) = 0$ erfüllt die gleichung

$$\text{grad}\, f(x,y) + \lambda\, \text{grad}\, g(x,y) = \vec{0},$$

also

$$\begin{aligned} (1) \qquad & y - 4x - 2\lambda x = 0 \\ (2) \qquad & x - 4y - 2\lambda y = 0 \\ (3) \qquad & 3 - x^2 - y^2 = 0. \end{aligned}$$

Aus (2) folgt

$$(4) \quad x = (4+2\lambda)y.$$

Einsetzen in (1) liefert

$$y(1-(4+2\lambda)^2) = 0,$$

dabei ist $y = 0$ keine Lösung (weil aus $(2) x = 0$ folgen würde und 3 nicht erfüllt wäre), stattdessen nur $(1-(4+2\lambda)^2) = 0$, folglich

$$\lambda_1 = -\frac{3}{2} \quad \lambda_2 = -\frac{5}{2}.$$

Also aus (4) folgt damit $x \pm y$ und mit (3) ergeben schließlich die stellen

$$\Big(\sqrt{\frac{3}{2}}, \sqrt{\frac{3}{2}}\Big),\ \Big(\sqrt{\frac{3}{2}}, -\sqrt{\frac{3}{2}}\Big),\ \Big(-\sqrt{\frac{3}{2}}, \sqrt{\frac{3}{2}}\Big) \text{ und } \Big(-\sqrt{\frac{3}{2}}, -\sqrt{\frac{3}{2}}\Big).$$

Die Nebenbedingung stellt einen Kreis mit Mittelpunkt $(0,0)$ und Radius $\sqrt{3}$ dar.

Aufgabe 6 $[\mathbf{4P + 6P}]$

(a) Der Integrationsbereich des integrals $\int\limits_{x=0}^{\ln(3)} \int\limits_{y=e^x}^{3} f(x,y)\,dydx$ ist ein Normalbereich bezüglich der x-Achse:

$$0 \le x \le \ln 3, \quad e^x \le y \le 3.$$

Beschrieben als Normalbereich bezüglich der y-Achse:

$$1 \le y \le 3, \quad 0 \le x \le \ln y.$$

Somit ergibt sich als Integral mit vertauschter Integrationsreihenfolge $\int\limits_{y=1}^{3} \int\limits_{x=0}^{\ln y} f(x,y)\,dxdy$.

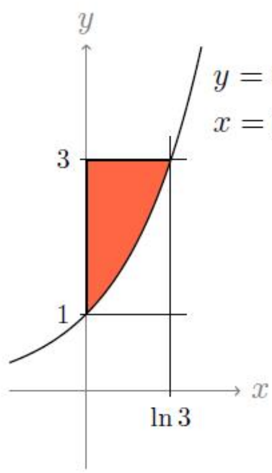

Abbildung 1: Skizze (6-a)

(b) Kugelkoordinaten mit

$$0 \le \phi \le \frac{\pi}{2}, \quad 0 \le \theta \le \frac{\pi}{2}, \quad 0 \le r \le 3.$$

$$
\begin{aligned}
\int\limits_K \frac{xyz}{x^2+y^2}\, d(x,y,z) &= \int\limits_0^3 \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{r^3 \cos(\phi)\sin(\phi)\sin^2(\theta)\cos(\theta)}{r^2 \sin^2(\theta)}\, r^2 \sin(\theta)\, d\theta d\phi dr \\
&= \int\limits_0^3 r^3 dr \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(\phi)\sin(\phi) d\phi \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \sin(\theta)\cos(\theta) d\theta \\
&= \Big[\frac{1}{4} r^4\Big]_0^3 \Big[\frac{1}{2}\sin^2(\phi)\Big]_0^{\frac{\pi}{2}} \Big[\frac{1}{2}\sin^2(\theta)\Big]_0^{\frac{\pi}{2}} \\
&= \frac{3^4}{4}\big(\frac{1}{2}\big)^2 = \frac{81}{16}.
\end{aligned}
$$