KLAUSUR

Analysis
(E-Technik/Mechatronik/W-Ing)

12.09.2017

Prof. Dr. Werner Seiler
Dr. Matthias Fetzer, Dominik Wulf

Name:	Vorname:	Matr.–Nr./Studiengang:	Versuch–Nr.:

Unterschrift:

In der Klausur können Sie insgesamt 60 Punkte erreichen.
50% der Punkte reichen sicher zum Bestehen.

1)	2)	3)	4)	5)	6)

Punkte:	Note:

Fangen Sie für jede Aufgabe ein neues Blatt an.
Beschreiben Sie nur die Vorderseite der Blätter.
Geben Sie alle Rechenschritte an!

Aufgabe 1: (10 Punkte)

(a) Bestimmen Sie den Grenzwert der Folge $(a_n)_{n=0}^{\infty}$ mit $a_n = \frac{\cos(n)+4}{5n+1}$.

(b) Zeigen Sie, dass die Folge $(b_n)_{n=0}^{\infty}$ für $b_n = \frac{3^{n+1}+1}{2^n}$ gegen $+\infty$ divergiert.

(c) Gegeben sei die folgende rekursiv definierte Folge:

$$a_0 = 0\,; \quad a_{n+1} = \sqrt{a_n} + 1 \text{ für } n \geq 2.$$

Zeigen Sie, dass die Folge $(a_n)_{n=0}^{\infty}$ durch 4 nach oben beschränkt ist. Beweisen Sie, dass die Folge konvergiert und bestimmen Sie den Grenzwert.

Lösung:

a) Es gilt $-1 \leq \cos(n) \leq 1$ für jedes $n \in \mathbb{N}$ und damit

$$\frac{-1+4}{5n+1} \leq a_n \leq \frac{1+4}{5n+1}.$$

Daraus folgt:

$$0 = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{3}{n}}{5+\frac{1}{n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{-1+4}{5n+1} \leq \lim_{n\to\infty} a_n \leq \lim_{n\to\infty} \frac{1+4}{5n+1} = 0,$$

also $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$ aufgrund des Einschachtelungsprinzips.

b) $b_n = \frac{3^{n+1}+1}{2^n} = 3\left(\frac{3}{2}\right)^n + \frac{1}{2^n}$. Es ist aus der Vorlesung bekannt, dass $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\frac{3}{2}\right)^n = +\infty$ und $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{2^n} = 0$. Mit der erweiterten Rechenregel "$a \cdot \infty + b = \infty$" aus der Vorlesung gilt dann $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = +\infty$.

c)
- Beschränktheit: Beweis mit vollständiger Induktion.
  I-Anfang: $a_0 = 0 \leq 4$.
  I-Annahme: $a_n \leq 4$ für ein $n \in \mathbb{N}$.
  I-Schluss: $a_{n+1} = \sqrt{a_n} + 1 \leq \sqrt{4} + 1 \leq 3 \leq 4$.
- Konvergenz: Laut Vorlesung gilt, dass jede beschränkte monotone Folge konvergiert. Da die Folge durch 4 beschränkt ist, muss nur noch gezeigt werden, dass die Folge monoton (wachsend) ist, d.h. $a_n \leq a_{n+1}$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Dazu wieder vollständige Induktion:
  I-Anfang: $a_0 = 0 \leq 1 = a_1$.
  I-Annahme: $a_n \leq a_{n+1}$ für ein $n \in \mathbb{N}$.
  I-Schluss: Wegen $0 = a_0 \leq a_1 \leq .... \leq a_n \leq a_{n+1}$ ist auch $\sqrt{a_n} \leq \sqrt{a_{n+1}}$ und damit $a_{n+1} = \sqrt{a_n} + 1 \leq \sqrt{a_{n+1}} + 1 = a_{n+2}$.

– Es sei a der Grenzwert der Folge. Wie aus der Vorlesung/Übungen bekannt, muss dann $a = \sqrt{a} + 1$ gelten, also $a - 1 = \sqrt{a}$ bzw. $a^2 - 2a + 1 = a$. Diese Gleichung hat die Lösungen $\frac{3}{2} \pm \frac{\sqrt{5}}{2}$. Da $\frac{3}{2} - \frac{\sqrt{5}}{2} \approx 0,38 < a_1$ kommt wegen der Monotonie $\frac{3}{2} - \frac{\sqrt{5}}{2}$ nicht als Grenzwert in Frage. Der Grenzwert ist also $a = \lim_{n\to\infty} a_n = \frac{3}{2} + \frac{\sqrt{5}}{2}$.

Aufgabe 2: (10 Punkte)
Es sei $a > 0$ eine positive reelle Zahl. Die Funktion f_a sei gegeben durch

$$f_a : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ x \mapsto \mathrm{e}^x(x^2 - a).$$

(a) Bestimmen Sie die Nullstellen von f_a.

(b) Bestimmen Sie die lokalen Extremstellen von f_a.

(c) Handelt es sich bei den lokalen Extremstellen aus (b) um globale Extremstellen?

(d) Bestimmen Sie $\lim_{x\to+\infty} f_a(x)$ und $\lim_{x\to-\infty} f_a(x)$.

(e) Skizzieren Sie f_a für $a = 4$, markieren Sie dabei die in (a) bis (d) bestimmten Eigenschaften.

Lösung:

a) Wegen $\mathrm{e}^x > 0$ für alle x gilt $f_a(x) = \mathrm{e}^x(x^2 - a) = 0 \Leftrightarrow x^2 - a = 0 \Leftrightarrow x = \pm\sqrt{a}$. Also sind $\sqrt{a}$ und $-\sqrt{a}$ die einzigen Nullstellen von f_a.

b) Zunächst die Ableitungen. Mit den üblichen Rechenregeln erhält man:

$$f_a'(x) = \mathrm{e}^x(x^2 - a) + \mathrm{e}^x(2x) = \mathrm{e}^x(x^2 + 2x - a)$$

und dann

$$f_a''(x) = \mathrm{e}^x(x^2 + 2x - a) + \mathrm{e}^x(2x + 2) = \mathrm{e}^x(x^2 + 4x + 2 - a).$$

Für die lokalen Extremstellen muss gelten: $f_a'(x) = 0$, also wie bei a) $x^2 + 2x - a = 0$. Die Lösungen sind $x_1 = -1 + \sqrt{1 + a}$ und $x_2 = -1 - \sqrt{1 + a}$. Wegen

$$f_a''(x_1) = \mathrm{e}^{-1+\sqrt{1+a}}((-1 + \sqrt{1 + a})^2 + 4(-1 + \sqrt{1 + a}) + 2 - a)$$

$$= \mathrm{e}^{-1+\sqrt{1+a}}(1 - 2\sqrt{1 + a} + 1 + a - 4 + 4\sqrt{1 + a} + 2 - a) = \mathrm{e}^{-1+\sqrt{1+a}}(2\sqrt{1 + a}) > 0$$

liegt bei x_1 ein lokales Minimum vor. Analog erhält man wegen

$$f_a''(x_2) = \mathrm{e}^{-1-\sqrt{1+a}}((-1 - \sqrt{1 + a})^2 + 4(-1 - \sqrt{1 + a}) + 2 - a)$$

$$= \mathrm{e}^{-1-\sqrt{1+a}}(1 + 2\sqrt{1 + a} + 1 + a - 4 - 4\sqrt{1 + a} + 2 - a) = \mathrm{e}^{-1-\sqrt{1+a}}(-2\sqrt{1 + a}) < 0$$

ein lokales Maximum bei x_2.

c) Es gilt $\lim\limits_{x\to+\infty} f_a(x) = +\infty$ (da sowohl $\lim\limits_{x\to\infty} \mathrm{e}^x = +\infty$ als auch $\lim\limits_{x\to\infty} x^2 - a = +\infty$). Demnach kann bei x_2 kein globales Maximum vorliegen.

Da f_a' nur zwei Nullstellen hat und stetig ist, kann f_a' nur bei den Nullstellen x_1 und x_2 aus b) das Vorzeichen wechseln. Da bei x_1 ein lokales Minimum von f_a vorliegt und $x_2 < x_1$, ist f_a' also rechts von x_1 positiv und damit ist f_a rechts von x_1 monoton wachsend. Analog ist f_a zwischen x_2 und x_1 monoton fallend. Da

$$f_a(x_2) = \mathrm{e}^{-1-\sqrt{1+a}}((-1-\sqrt{1+a})^2 - a)$$

$$= \mathrm{e}^{-1-\sqrt{1+a}}((-1-\sqrt{1+a})^2 - a) = \mathrm{e}^{-1-\sqrt{1+a}}(1 + 2\sqrt{1+a} + 1 + a - a) > 0$$

und außerdem wegen $x_2 < -a$ links von x_2 keine Nullstelle von f_a liegt, ist f_a links von x_2 positiv. Da

$$\begin{aligned} f_a(x_1) &= \mathrm{e}^{-1+\sqrt{1+a}}((-1+\sqrt{1+a})^2 - a) \\ &= \mathrm{e}^{-1+\sqrt{1+a}}(1 - 2\sqrt{1+a} + 1 + a - a) < 0, \end{aligned}$$

ist auch $f_a(x)$ links von x_2 größer als $f_a(x_1)$ damit liegt bei x_1 ein globales Minimum vor.

d) Wie schon bei c) gezeigt ist $\lim\limits_{x\to+\infty} f_a(x) = +\infty$.

Da $\lim\limits_{x\to-\infty} \frac{1}{\mathrm{e}^x} = \infty$ gilt mit der doppelten Anwendung der Regel von de l'Hospital:

$$\lim_{x\to-\infty} f_a(x) = \lim_{x\to-\infty} \frac{x^2 - a}{\frac{1}{\mathrm{e}^x}} = \lim_{x\to-\infty} \frac{2x}{-\frac{1}{\mathrm{e}^x}} = \lim_{x\to-\infty} \frac{2}{\frac{1}{\mathrm{e}^x}} = \lim_{x\to-\infty} 2\mathrm{e}^x = 0.$$

Aufgabe 3: (10 Punkte)

(a) Bestimmen Sie das Taylorpolynom $T_3(f, x, 1)$ vom Grad 3 um $x_0 = 1$ für die Funktion

$$f:\ \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ x \mapsto \mathrm{e}^{-x^2+1} + 3x.$$

(b) Berechnen Sie mit der Substitution $t = \frac{2}{x}$ das Integral

$$\int \frac{\cos\left(\frac{2}{x}\right)}{x^2}\,\mathrm{d}x.$$

(c) Berechnen Sie das Integral

$$\int_1^{\mathrm{e}} \ln(x)(4x+1)\,\mathrm{d}x.$$

Lösung:

a) Zunächst die ersten drei Ableitungen:

$$f'(x) = -2x\mathrm{e}^{-x^2+1} + 3,$$

$$f''(x) = -2\mathrm{e}^{-x^2+1} - 2x(-2x)\mathrm{e}^{-x^2+1} = \mathrm{e}^{-x^2+1}(4x^2-2),$$
$$f''(x) = \mathrm{e}^{-x^2+1}(8x) + \mathrm{e}^{-x^2+1}(-2x)(4x^2-2) = \mathrm{e}^{-x^2+1}(-8x^3+12x).$$

Setzt man das alles in die Formel

$$T_3(f,x,1) = f(1) + f'(1)(x-1) + \frac{f''(1)}{2!}(x-1)^2 + \frac{f'''(1)}{3!}(x-1)^3$$

ein, ergibt sich

$$T_3(f,x,1) = 2 + (x-1) + (x-1)^2 + \frac{2}{3}(x-1)^3.$$

b) Rechnet man wie in den Übungen, erhält man zunächst $\frac{dt}{dx} = -\frac{2}{x^2}$ und damit $dx = -\frac{x^2}{2}dt = -\frac{2}{t^2}dt$. Mit der Substitutionsformel erhält man dann

$$\int \frac{\cos\left(\frac{2}{x}\right)}{x^2}dx = \int \frac{\cos(t)}{\left(\frac{2}{t}\right)^2}(-\frac{2}{t^2})dt = \int -\frac{\cos(t)}{2}dt = -\frac{\sin(t)}{2}.$$

Nach Rücksubstitution ergibt sich dann $\int \frac{\cos\left(\frac{2}{x}\right)}{x^2}dx = -\frac{\sin\left(\frac{2}{x}\right)}{2}$.

c) Zunächst berechnet man mit partieller Integration die Stammfunktion von $\ln(x)(4x+1)$:

$$\int \ln(x)(4x+1)dx = \ln(x)(2x^2+x) - \int \frac{1}{x}(2x^2+x)dx$$

$$= \ln(x)(2x^2+x) - \int (2x+1)dx = \ln(x)(2x^2+x) - x^2 - x.$$

Damit erhält man

$$\int\limits_1^{\mathrm{e}} \ln(x)(4x+1)dx = \left[\ln(x)(2x^2+x) - x^2 - x\right]_1^{\mathrm{e}}$$

$$= \ln(\mathrm{e})(2\mathrm{e}^2+\mathrm{e}) - \mathrm{e}^2 - \mathrm{e} - (\ln(1)(2+1) - 1 - 1) = \mathrm{e}^2 + 2.$$

Aufgabe 4: (8 Punkte)

(a) Berechnen Sie die folgende Reihe:

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{7 \cdot 4^k}{5^{k+2}}.$$

(b) Zeigen Sie, dass die folgende Reihe konvergiert:

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k(k+1)^2}{k!}.$$

Lösung:

a) Es ist $\sum\limits_{k=0}^{n} \frac{7\cdot 4^k}{5^{k+2}} = \frac{7}{25} \sum\limits_{k=0}^{n} \left(\frac{4}{5}\right)^k$. Da $\frac{4}{5} < 1$ gilt mit der geometrischen Reihe $\sum\limits_{k=0}^{\infty} \left(\frac{4}{5}\right)^k = \frac{1}{1-\frac{4}{5}} = 5$ und damit mit den Rechenregeln für konvergente Folgen:

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{7\cdot 4^k}{5^{k+2}} = \frac{7}{25}\cdot 5 = \frac{7}{5}.$$

b) Wir verwenden das Quotientenkriterium für die Summanden $a_k = \frac{(-1)^k(k+1)^2}{k!}$. Diese ist möglich, da alle a_k von 0 verschieden sind. Es ergibt sich:

$$\lim_{k\to\infty} |\frac{a_{k+1}}{a_k}| = \lim_{k\to\infty} \left| \frac{\frac{(-1)^{k+1}(k+2)^2}{(k+1)!}}{\frac{(-1)^k(k+1)^2}{k!}} \right|$$

$$= \lim_{k\to\infty} \frac{(k+2)^2 k!}{(k+1)!(k+1)^2} = \lim_{k\to\infty} \frac{(k+2)^2}{(k+1)(k+1)^2} = \lim_{k\to\infty} \frac{k^2+4k+4}{k^3+3k^2+3k+1} = 0.$$

Damit konvergiert die Reihe aufgrund des Quotientenkriteriums.

Aufgabe 5: (10 Punkte)
Gegeben sei die Funktion

$$f:\ \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R},\ (x,y) \mapsto x^2\left(\frac{y}{2}+x\right) + y^2 + 10y.$$

(a) Bestimmen Sie den Gradienten von f für alle $(x,y) \in \mathbb{R}^2$.

(b) Bestimmen Sie die Hesse-Matrix von f für alle $(x,y) \in \mathbb{R}^2$.

(c) Berechnen Sie die kritischen Stellen von f.

(d) Bestimmen Sie, welche der kritischen Stellen lokale Extrema sind und bestimmen Sie gegebenfalls, ob es sich um ein lokales Minimum oder ein lokales Maximum handelt.

Lösung:

a) Ausmultipliziert ist $f((x,y)) = \frac{x^2y}{2} + x^3 + y^2 + 10y$. Dann:

$$\mathrm{grad}(f)((x,y)) = (\frac{\partial f}{\partial x}((x,y)), \frac{\partial f}{\partial y}((x,y))) = (xy + 3x^2, \frac{x^2}{2} + 2y + 10).$$

b) Es ist

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}((x,y)) = y + 6x, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}((x,y)) = x, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}((x,y)) = 2.$$

Damit ist die Hessematrix:

$$\begin{pmatrix} y+6x & x \\ x & 2 \end{pmatrix}$$

c) Für die kritischen Stellen muss gelten $\operatorname{grad}(f)((x,y)) = (0,0)$. Also $xy + 3x^2 = 0$. Damit muss $x = 0$ oder $y = -3x$ gelten.

Fall 1: $x = 0$. Dann folgt mit $\frac{x^2}{2} + 2y + 10 = 0$ dass $y = -5$. Ein kritische Stelle ist also $(x_1, y_1) = (0, -5)$.

Fall 2: $y = -3x$. Dann folgt mit $\frac{x^2}{2} + 2y + 10 = 0$ dass $\frac{x^2}{2} - 6x + 10 = 0$. Diese Gleichung hat die Lösungen $x_2 = 2$ und $x_3 = 10$. Die weiteren kritischen Stellen sind also $(x_2, y_2) = (2, -6)$ und $(x_3, y_3 = 10, -30)$.

d) Wir betrachten an jeder kritischen Stelle die Hessematrix, um den entsprechenden Satz aus der Vorlesung anzuwenden.

Bei $(x_1, y_1) = (0, -5)$ ist $\begin{pmatrix} -5 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ die Hessematrix. Die Determinante ist -10. Die Hessematrix ist indefinit und es liegt kein lokales Extremum vor.

Bei $(x_2, y_2) = (2, -6)$ ist $\begin{pmatrix} 6 & 2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$ die Hessematrix. Die Determinante ist 8. Der Eintrag links oben ist positiv. Damit ist die Hessematrix positiv definit und es liegt ein lokales Minimum vor.

Bei $(x_3, y_3) = (10, -30)$ ist $\begin{pmatrix} 30 & 10 \\ 10 & 2 \end{pmatrix}$ die Hessematrix. Die Determinante ist -40. Die Hessematrix ist indefinit und es liegt kein lokales Extremum vor.

Aufgabe 6: (12 Punkte)

(a) Gegeben seien das Vektorfeld $V(x,y,z) = (x+y, xyz, x^2+y^2)$ und die Kurve K, die parametrisiert wird durch

$$\gamma\colon [0,1] \to \mathbb{R}^3, \quad t \mapsto (t, t^2, 2).$$

Berechnen Sie das Kurvenintegral von V längs K

$$\int_K V(s)\, \mathrm{d}s.$$

(b) Gegeben sei der Zylinder $Z = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 \leq 1,\ 0 \leq z \leq 2\}$. Berechnen Sie das Integral

$$\int_Z z(x^2+y^2)\, \mathrm{d}(x,y,z).$$

Lösung:

a) Es ist $\gamma'(t) = (1, 2t, 0)$. Nach der Defintion des Wegintegrals gilt dann:

$$\int_K V(s)ds = \int_0^1 V(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t)dt = \int_0^1 (t + t^2, 2t^3, t^2 + t^4) \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2t \\ 0 \end{pmatrix} dt$$

$$= \int_0^1 t + t^2 + 4t^4 dt = \left[\frac{t^2}{2} + \frac{t^3}{3} + \frac{4t^5}{5}\right]_0^1 = \frac{49}{30}.$$

b) Verwendet man Zylinderkoordinaten mittels

$$g\colon (0,1] \times (0, 2\pi) \times [0,2] \to Z, (r, \varphi, z) \mapsto (r\cos\varphi, r\sin\varphi, z),$$

so ist die Jacobi-Matrix gegeben durch

$$\frac{dg}{d(x,y,z)}((x,y,z)) = \begin{pmatrix} \cos\varphi & -r\sin\varphi & 0 \\ \sin\varphi & r\cos\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Die Determinante der Jaboci-Matrix ist demnach r. Setz man dies in die mehrdimensionale Transformationsformel ein, ergibt sich:

$$\int_Z z(x^2 + y^2)d(x,y,z) = \int_0^1 \int_0^{2\pi} \int_0^2 (z((r\cos\varphi)^2 + (r\sin\varphi)^2))r\,dz\,d\varphi\,dr$$

$$= \int_0^1 \int_0^{2\pi} \int_0^2 zr^3\,dz\,d\varphi\,dr = \int_0^1 \int_0^{2\pi} 2r^3\,d\varphi\,dr = \int_0^1 4\pi r^3\,dr = \pi.$$