KLAUSUR

Analysis
(E-Techniker/Mechatroniker/W-Ingenieure)

10.3.2015

(W. Strampp)

Name:	Vorname:	Matr.-Nr./Studiengang:	Versuch-Nr.:

Unterschrift:

Für jede Aufgabe gibt es 10 Punkte. Zum Bestehen der Klausur sind 27 Punkte erforderlich.

1)	2)	3)	4)	5)	6)

Punkte:	Note:

Fangen Sie für jede Aufgabe ein neues Blatt an.
Beschreiben Sie nur die Vorderseite der Blätter.
Geben Sie alle Rechenschritte an!

1. (a) Berechnen Sie den Grenzwert der Folgen:

$$a_n = \frac{n^2 + \cos(n)}{n^2 + 1}\,,\; b_n = \frac{\sqrt{n+1} - \sqrt{n}}{\sqrt{n}}\,,\; n \in \mathbb{N}\,.$$

   (b) Zeigen Sie durch vollständige Induktion für $n \in \mathbb{N}$:

$$\sum_{\nu=1}^{n} \frac{\nu}{2^\nu} = \frac{2^{n+1} - n - 2}{2^n}\,.$$

2. (a) Gegeben ist die Funktion

$$f(x) = \begin{cases} -x & , \quad x \leq 0\,, \\ x^2 & , \quad x > 0\,. \end{cases}$$

   Begründen Sie, dass die Funktion im Punkt $x_0 = 0$ nicht differenzierbar ist.

   (b) Berechnen Sie folgende Grenzwerte:

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\ln(\ln(x))}{\ln(x)}\,, \quad \lim_{x\to 0} \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{\sin(x)} \right)\,.$$

3. (a) Gegeben ist die Funktion: $f(x) = \frac{x}{x^2+1}$.
   Berechnen Sie die Grenzwerte: $\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x)\,.$
   Geben Sie Monotonie-Intervalle von f an, und skizzieren Sie die Funktion.
   Berechnen Sie die Taylorreihe um den Punkt $x_0 = 0$ der Funktion f.
   (Hinweis: Geometrische Reihe.)

   (b) Berechnen Sie die folgende Integrale mit der Substitution $x = t^2$:

$$\int \frac{e^{-\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}\,dx\,, \qquad \int \frac{1}{\sqrt{x}\,(1+x)}\,dx\,.$$

   Bitte wenden!

4. (a) Für welche $x \in \mathbb{R}$ konvergiert die folgende Potenzreihe absolut

$$\sum_{\nu=1}^{\infty} (-1)^{\nu} \frac{x^{2\nu}}{\nu\, 2^{\nu}} \, ?$$

(b) Wie lautet das Taylorpolynom der Funktion $f(x,y) = \dfrac{e^x}{1+y}\,, y > -1\,,$ vom Grad 3 um $(x_0, y_0) = (0,0)$? (Hinweis: Geometrische- und Exponentinentialreihe).

5. Gegeben ist die Funktion

$$f(x,y) = (x+y+1)^3 - 27\,x\,y\,.$$

Besitzt f Extremalstellen?
Wie lautet das Taylorpolynom von f vom Grad 3 um den Entwicklungspunkt $(0,0)$?

6. (a) Berechnen Sie das Integral

$$\int_D y \, d(x,y)$$

über den Bereich $D \subset \mathbb{R}^2$, der durch folgende Ungleichungen beschrieben wird: $0 \leq x \leq 1 - y^2\,, 0 \leq y \leq 1\,.$

(b) Berechnen Sie das Integral

$$\int_D x \, d(x,y)$$

über den Bereich $D \subset \mathbb{R}^2$, der durch folgende Ungleichungen beschrieben wird: $0 \leq \sqrt{x^2+y^2} \leq 1\,, x \geq 0\,, y \geq 0\,, y \geq x\,.$
(Hinweis: Polarkoordinaten, Funktionaldeterminante$= r$).

Lösungen:

1.a)

$$a_n = \frac{n^2 + \cos(n)}{n^2+1} = \frac{n^2}{n^2+1} + \frac{\cos(n)}{n^2+1} = \frac{1}{1+\frac{1}{n^2}} + \frac{\frac{\cos(n)}{n^2}}{1+\frac{1}{n^2}}$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{1+\frac{1}{n^2}} = 1\,, \left|\frac{\cos(n)}{n^2}\right| < \frac{1}{n^2}\,, \lim_{n\to\infty} \frac{\cos(n)}{n^2} = 0\,,$$

$$\lim_{n\to\infty} a_n = 1\,.$$

$$b_n = \frac{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}}{\sqrt{n}} = \sqrt{1+\frac{1}{n}} - 1 \implies \lim_{n\to\infty} b_n = 0\,.$$

Oder:

$$b_n = \frac{\left(\sqrt{n+1}-\sqrt{n}\right)\,\left(\sqrt{n+1}+\sqrt{n}\right)}{\sqrt{n}\,\left(\sqrt{n+1}+\sqrt{n}\right)} = \frac{1}{\sqrt{n}\,\left(\sqrt{n+1}+\sqrt{n}\right)} \implies \lim_{n\to\infty} b_n = 0\,.$$

1.b)

Ind. Anf. : $\displaystyle\sum_{\nu=1}^{1} \frac{\nu}{2^\nu} = \frac{1}{2}\,, \frac{2^{1+1}-1-2}{2^1} = \frac{1}{2}\,.$

Ind. Ann. : Für ein $n \geq 1$ gelte: $\sum_{\nu=1}^{n} \frac{\nu}{2^\nu} = \frac{2^{n+1}-n-2}{2^n}$.

Ind. Schluss:

$$\begin{aligned}\sum_{\nu=1}^{n+1} \frac{\nu}{2^\nu} &= \left(\sum_{\nu=1}^{n} \frac{\nu}{2^\nu}\right) + \frac{n+1}{2^{n+1}} = \frac{2^{n+1}-n-2}{2^n} + \frac{n+1}{2^{n+1}} \\ &= \frac{2^{n+2}-2\,n-4+n+1}{2^{n+1}} = \frac{2^{n+2}-(n+1)-2}{2^{n+1}}\,.\end{aligned}$$

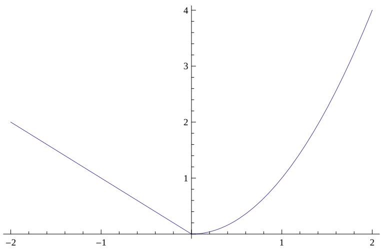
2.a) Linksseitiger Grenzwert:

$$\lim_{x\to 0^-} \frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim_{x\to 0^-} \frac{-x}{x} = \lim_{x\to 0^-} (-1) = -1\,.$$

Rechtssseitiger Grenzwert:

$$\lim_{x\to 0^-} \frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim_{x\to 0^+} \frac{x^2}{x} = \lim_{x\to 0^+} x = 0\,.$$

Der linksseitige Grenzwert des Differenzenquotienten ist ungleich dem rechtsseitigen Grenzwert des Differenzenquotienten. Also ist f an der Stelle 0 nicht differenzierbar.



Die Funktion

$$f(x) = \begin{cases} x & , \quad x \leq 0\,, \\ x^2 & , \quad x > 0\,. \end{cases}$$

2.b)

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\ln(\ln(x))}{\ln(x)} = \lim_{x\to\infty} \frac{\frac{1}{\ln(x)}\,\frac{1}{x}}{\frac{1}{x}} = 0\,.$$

$$\begin{aligned} \lim_{x\to 0} \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{\sin(x)}\right) &= \lim_{x\to 0} \frac{\sin(x)-x}{x\,\sin(x)} \\ &= \lim_{x\to 0} \frac{\cos(x)-1}{\sin(x)+x\,\cos(x)} \\ &= \lim_{x\to 0} \frac{-\sin(x)}{2\,\cos(x)-x\,\sin(x)} \\ &= 0\,. \end{aligned}$$

3.a)

$$\lim_{x\to\pm\infty} \frac{x}{x^2+1} = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{1}{2\,x} = 0\,.$$

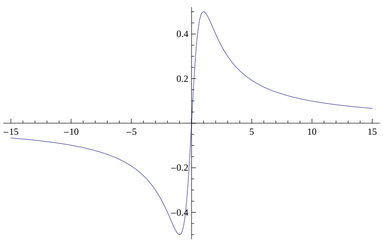
$$f(x) = \frac{x}{x^2+1}\,, \quad f'(x) = \frac{1}{x^2+1} - \frac{2\,x^2}{(x^2+1)^2} = \frac{-x^2+1}{(x^2+1)^2}\,,$$

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = \pm 1\,.$$

$$f'(x) < 0\,, \quad x < -1\,,$$

$$f'(x) > 0\,, \quad -1 < x < 1\,,$$

$$f'(x) < 0\,, \quad 1 < x\,,$$



Die Funktion $f(x) = \frac{x}{x^2+1}$

$$f(x) = x \sum_{k=0}^{\infty} (-x^2)^k = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k\, x^{2\,k+1}\,, \quad |x| < 1\,.$$

3.b)

Substitution: $x = t^2$, $t > 0$, $t = \sqrt{x}$, $dx = 2\,t\,dt$:

$$\int \frac{e^{-\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}\,dx = \left(\int \frac{e^{-t}}{t}\,2\,t\,dt\right)_{t=\sqrt{x}} = \left(-2\,e^{-t} + c\right)_{t=\sqrt{x}} = -2\,e^{-\sqrt{x}} + c\,,$$

$$\begin{aligned} \int \frac{1}{\sqrt{x}\,(1+x)}\,dx &= \left(\int \frac{1}{t\,(1+t^2)}\,2\,t\,dt\right)_{t=\sqrt{x}} = (2\,\arctan(t) + c)_{t=\sqrt{x}} \\ &= 2\,\arctan(\sqrt{x}) + c\,. \end{aligned}$$

4.a)

$$\sum_{\nu=1}^{\infty}(-1)^{\nu}\,\frac{x^{2\,\nu}}{\nu\,2^{\nu}}=\sum_{\nu=1}^{\infty}(-1)^{\nu}\,\frac{(x^2)^{\nu}}{\nu\,2^{\nu}}\,.$$

Betrachte:

$$\sum_{\nu=1}^{\infty}(-1)^{\nu}\frac{y^{\nu}}{\nu\,2^{\nu}}\,.$$

$$a_\nu=(-1)\nu\,\frac{1}{\nu\,2^{\nu}}\,,\qquad \lim_{\nu\to\infty}\left|\frac{a_{\nu+1}}{a_\nu}\right|=\lim_{\nu\to\infty}\frac{\nu}{\nu+1}\,\frac{1}{2}=\frac{1}{2}\,.$$

Alternative:

$$\lim_{\nu\to\infty}\sqrt[\nu]{|a_\nu|}=\lim_{\nu\to\infty}\frac{1}{2\,\sqrt[\nu]{\nu}}=\frac{1}{2}\,.$$

Also konvergiert $\sum_{\nu=1}^{\infty}(-1)^{\nu}\,\frac{y^{\nu}}{\nu\,2^{\nu}}$ absolut für $|y|<2$ und divergiert für $|y|>2$.
$\sum_{\nu=1}^{\infty}(-1)^{\nu}\,\frac{y^{\nu}}{\nu\,2^{\nu}}$ konvergiert absolut für $|x|<\sqrt{2}$ und divergiert für $|x|>\sqrt{2}$.
Was passiert für $x=\pm\sqrt{2}$?

$$\sum_{\nu=1}^{\infty}(-1)^{\nu}\,\frac{(\pm\sqrt{2})^{2\,\nu}}{\nu\,2^{\nu}}=\sum_{\nu=1}^{\infty}(-1)^{\nu}\,\frac{1}{\nu}$$

Alternierende harmonische Reihe ist bedingt konvergent.

4.b)

$$\begin{aligned}\frac{e^x}{1+y}=\left(\sum_{\nu=0}^{\infty}\frac{1}{\nu!}\,x^{\nu}\right)\left(\sum_{\mu=0}^{\infty}(-1)^{\mu}\,y^{\mu}\right) &= \sum_{\nu=0}^{\infty}\left(\sum_{\mu=0}^{\nu}\frac{(-1)^{\nu-\mu}}{\mu!}\,x^{\mu}\,y^{\nu-\mu}\right)\\ &= \left(1+x+\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{6}+\cdots\right)\big(1-y+y^2-y^3+\cdots\big)\end{aligned}$$

Das Taylorpolynom vom Grad 3 lautet:

$$T_3(f,x,y,0,0)=1+x+\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{6}-y-x\,y-\frac{x^2}{2}\,y+y^2+x\,y^2-y^3\,.$$

5)

$$f(x,y) = (x+y+1)^3 - 27\,x\,y\,.$$

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 3\,(x+y+1)^2 - 27\,y\,,$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 3\,(x+y+1)^2 - 27\,x\,.$$

$$3\,(x+y+1)^2 - 27\,y = 0\,,$$

$$3\,(x+y+1)^2 - 27\,x = 0\,,$$

$x = y$ und $(2\,x+1)^2 - 9\,x = 0$, also $x = \dfrac{1}{4}, 1$.
Hesse-Matrix:

$$H(x,y) = \begin{pmatrix} 6\,(x+y+1) & 6\,(x+y+1) - 27 \\ 6\,(x+y+1) - 27 & 6\,(x+y+1) \end{pmatrix}\,.$$

Im Punkt $\left(\dfrac{1}{4}, \dfrac{1}{4}\right)$:

$$H\left(\frac{1}{4}, \frac{1}{4}\right) = \begin{pmatrix} 9 & -18 \\ -18 & 9 \end{pmatrix}$$

Determinante der Hessematrix $9^2 - 18^2 = -243 < 0$. Sattelpunkt.
Im Punkt $(1,1)$:

$$H(1,1) = \begin{pmatrix} 18 & -9 \\ -9 & 18 \end{pmatrix}\,.$$

Determinate der Hessematrix: $18^2 - 9^2 = 243 > 0$ und $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(1,1) = 18 > 0$. Also Minimalstelle.

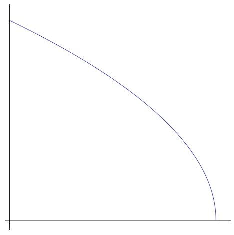
$$T_3(f, (x,y), (0,0)) = f(x,y)\,.$$

Polynom vom Grad 3 stimmt mit dem Taylorpolynom überein.

Die Funktion $f(x,y) =$
$(x+y+1)^3 - 27\,x\,y$

6.a)

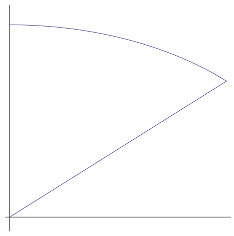
$$\begin{aligned}\int_D y\, d(x,y) &= \int_0^1 \left(\int_0^{1-y^2} y\, dx \right) dy \\ &= \int_0^1 (x\, y)\big|_{x=0}^{x=1-y^2}\ dy = \int_0^1 (y - y^3)\, dy \\ &= = \left(\frac{y^2}{2} - \frac{y^4}{4} \right)\Big|_{y=0}^{y=1} = \frac{1}{4}\,.\end{aligned}$$



Der Integrationsbereich

6.b)

$$\begin{aligned}\int_D x\, d(x,y) &= \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \left(\int_0^1 r^2\ \cos(\phi)\, dr \right)\ d\phi = \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \left(\frac{r^3}{3}\ \cos(\phi) \right)_{r=0}^{r=1} d\phi \\ &= \frac{7}{3} \left(\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \cos(\phi)\, d\phi \right) = \frac{1}{3}\ (\sin(\phi))_{\phi=\frac{\pi}{4}}^{\phi=\frac{\pi}{2}} = \frac{1}{3} \left(1 - \frac{\sqrt{2}}{2} \right)\,.\end{aligned}$$



Der Integrationsbereich