KLAUSUR

Analysis
(E-Techniker/Mechatroniker/W-Ingenieure)

08.03.2016

(W. Koepf)

Name:	Vorname:	Matr.–Nr./Studiengang:	Versuch–Nr.:

Unterschrift:

Für jede Aufgabe gibt es 10 Punkte. Zum Bestehen der Klausur sollten 27 Punkte erreicht werden.

1)	2)	3)	4)	5)	6)

Punkte:	Note:

Fangen Sie für jede Aufgabe ein neues Blatt an.
Beschreiben Sie nur die Vorderseite der Blätter.
Geben Sie alle Rechenschritte an!

Aufgabe 1:

(a) Berechnen Sie den Grenzwert der Folge: $a_n = (1 + \frac{1}{2n^2})^{3n^2}$, $n \in \mathbb{N}$.
(**Hinweis:** $\lim\limits_{p \to +\infty} (1 + \frac{1}{p})^p = e$.)

(b) Zeigen Sie mit vollständiger Induktion: $\sum\limits_{k=1}^{n} (2k-1) = n^2$ für $n \geq 1$.

(c) Berechnen Sie den Grenzwert: $\lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{1 + 3 + 5 + \cdots + (2n-1)}{2 + 4 + 6 + \cdots + 2n}$.

(**Hinweis:** Man verwende (b) und $\sum\limits_{k=1}^{n} k = \dfrac{n(n+1)}{2}$.)

Aufgabe 2:
Gegeben sei $a > 0$ ein reeller Parameter und eine Funktion $f_a : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definiert durch

$$f_a(x) = (x^2 - 4x + 5)e^{x-a}.$$

(b) Berechnen Sie alle lokalen Extremstellen von f_a und geben Sie jeweils an, ob es sich um ein lokales Maximum oder Minimum handelt.

(c) Berechnen Sie die Wendepunkte von f_a.

(d) Berechnen Sie die Grenzwerte $\lim\limits_{x \to +\infty} f_a(x)$ und $\lim\limits_{x \to -\infty} f_a(x)$.

Aufgabe 3:

(a) Berechnen Sie das Taylorpolynom vom Grad 2 der Funktion $f(x) = (8+x)^{\frac{1}{3}}$ um den Punkt $x_0 = 0$.

(b) Berechnen Sie folgende Integrale:

$$I_1 = \int_0^a \frac{x}{e^{2x}}\,dx,\ a > 0 \quad \text{und} \qquad I_2 = \int_1^\infty \frac{dx}{x + x^2}\,dx.$$

Bitte wenden!

Aufgabe 4:

(a) Berechnen Sie mit Wurzelkriterium den Konvergenzradius der Potenzreihe

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(x+2)^{2k}}{(2+\frac{1}{k})^k}.$$

(b) Geben Sie das Taylorpolynom vom Grad 5 der Funktion

$$f(x,y) = \frac{y}{1-(x^2+y^2)}, \quad x^2+y^2 < 1.$$

(**Hinweis:** Man benutze die geometrische Reihe.)

Aufgabe 5:
Wir betrachten die Funktion $f(x,y) = x^4 - x^2 + (x-y)^2$.

(a) Berechnen Sie alle lokalen Minima und lokalen Maxima von f.

(b) Ermitteln Sie die Gleichung der Tangentialebene an den Graphen von $f(x,y)$ im Punkt $P = (1,-1)$.

Aufgabe 6:

(a) Die Kurven $y = 0, y = \sqrt{x}$ und $y = x - 2$ begrenzen in $\mathbb{R}^2$ einen Bereich B. Skizzieren Sie B und schreiben Sie das Bereichsintegral $\int_B f(x,y)d(x,y)$ einer stetigen Funktion $f : B \to \mathbb{R}$ als Doppelintegral

$$\int_{\square}^{\square}\int_{\square}^{\square} f(x,y)dxdy$$

mit entsprechenden Grenzen.

(b) Berechnen Sie das Integral

$$\int_{\mathcal{K}_{r_1,r_2}} (x^2+y^2)\, d(x,y)$$

über den Kreisring $\mathcal{K}_{r_1,r_2} \in \mathbb{R}^2$, der durch folgende Ungleichungen bechrieben wird:

$$r_1 \leq \sqrt{x^2+y^2} \leq r_2, \quad 0 < r_1 < r_2.$$

(**Hinweis:** Polarkoordinaten: $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r\cos(\phi) \\ r\sin(\phi) \end{pmatrix}$ und Funktionaldeterminante $= r$.)

Lösungsskizze

Aufgabe 1

a) $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = \lim\limits_{n\to+\infty} (1+\frac{1}{2n^2})^{\frac{3}{2}(2n^2)} = \lim\limits_{n\to+\infty} ((1+\frac{1}{2n^2})^{2n^2})^{\frac{3}{2}} = e^{\frac{3}{2}}$.

b) **1- Induktionsanfang:**

$$\sum_{k=1}^{1}(2k-1) = 1 = 1^2.$$

2- Induktionsschritt:

Vorraussetzung:

$$\sum_{k=1}^{n}(2k-1) = n^2 \text{ gilt für ein } n \in \mathbb{N}$$

Behauptung:

$$\sum_{k=1}^{n+1}(2k-1) = (n+1)^2.$$

Beweis:

$$\sum_{k=1}^{n+1}(2k-1) = \sum_{k=1}^{n}(2k-1) + 2(n+1) - 1 = n^2 + 2n + 1 = (n+1)^2.$$

c) Aus $\sum\limits_{k=1}^{n} k = \dfrac{n(n+1)}{2}$ folgt im Nenner:

$$2+4+6+\cdots+2n = 2\sum_{k=1}^{n} k = n(n+1)$$

und weiter

$$\frac{1+3+5+\cdots+(2n-1)}{2+4+6+\cdots+2n} = \frac{n^2}{n(n+1)} = \frac{1}{1+\frac{1}{n}}.$$

Hieraus folgt sofort:

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{1+3+5+\cdots+(2n-1)}{2+4+6+\cdots+2n} = 1.$$

Aufgabe 2

$$\begin{aligned}
f_a^{'}(x) &= (2x-4)e^{x-a} + (x^2-4x+5)e^{x-a} = (x-1)^2e^{x-a}.\\
f_a^{''}(x) &= 2(x-1)e^{x-a} + (x-1)^2e^{x-a} = (x^2-1)e^{x-a}.\\
f_a^{'''}(x) &= 2xe^{x-a} + (x^2-1)e^{x-a} = (x^2+2x-1)e^{x-a}.
\end{aligned}$$

a) **Extremstellen:**

$$f_a^{'}(x) = 0 \Leftrightarrow (x-1)^2 e^{a-x} = 0 \Leftrightarrow (x-1) = 0 \Leftrightarrow x = 1.$$

Aus

$$f_a^{''}(1) = 0 \quad \text{und} \quad f_a^{'''}(1) = 2 \neq 0$$

folgt, dass bei $x = 1$ die Funktion f_a keine Extremstelle sondern einen Horizontalwendepunkt besitzt.

b) **Wendepunkte:**

$$f_a^{''}(x) = 0 \Leftrightarrow (x^2-1)e^{x-a} = 0 \Leftrightarrow (x^2-1) = 0 \Leftrightarrow x = 1 \quad \text{oder} \quad x = -1.$$

Aus

$$f_a^{'''}(-1) = -3 \neq 0$$

folgt, dass die Funktion f_a noch einen Wendepunkt bei $x = -1$ besitzt.

c)

$$\lim_{x\to+\infty}(x^2-4x+5)e^{x-a} = (\infty \cdot \infty) = \infty.$$

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to-\infty}(x^2-4x+5)e^{x-a} = (\infty \cdot 0) &= \lim_{x\to-\infty}\frac{(x^2-4x+5)}{e^{a-x}} = \frac{\infty}{\infty} \quad \text{L'Hospital} \\
&= \lim_{x\to-\infty}\frac{2x-4}{-e^{a-x}} = \frac{\infty}{\infty} \quad \text{l'Hospital} \\
&= \lim_{x\to-\infty}\frac{2}{e^{a-x}} = \frac{2}{\infty} = 0.
\end{aligned}$$

Aufgabe 3

a) Das Taylorpolynom der Funktion $f(x)$ vom Grad 2 um den Punkt 0 ist

$$T_2(f,x,0) = f(0) + f^{'}(0)\,x + \frac{1}{2}f^{''}(0)\,x^2$$

mit

$$\begin{aligned}
f(0) &= 2, \\
f^{''}(x) &= \frac{1}{3}(x+8)^{-\frac{2}{3}} \Rightarrow f^{'}(0) = \frac{1}{12}, \\
f^{'''}(x) &= -\frac{2}{9}(x+8)^{-\frac{5}{3}} \Rightarrow f^{''}(0) = -\frac{1}{144}.
\end{aligned}$$

Also

$$T_2(f,x,0) = 2 + \frac{1}{12}x - \frac{1}{288}x^2.$$

b) i)

$$I_1 = \int_0^a \frac{x}{e^{2x}}\, dx = \int_0^a xe^{-2x}\, dx.$$

Eine partielle Integration mit

$$f(x) = x \text{ und } g'(x) = e^{-2x}$$

liefert

$$\begin{aligned} I_1 &= -\frac{x}{2}e^{-2x}\Big|_0^a + \frac{1}{2}\int_0^a e^{-2x}\, dx \\ &= -\frac{a}{2}e^{-2a} - \frac{1}{4}e^{-2x}\Big|_0^a \\ &= -\frac{a}{2}e^{-2a} - \frac{1}{4}e^{-2a} + \frac{1}{4}. \end{aligned}$$

(ii) Eine Integration durch Partialbruchzerlegung:

$$\begin{aligned} I_2 &= \lim_{b\to\infty} \int_1^b \frac{dx}{x(x+1)}\, dx \\ &= \lim_{b\to\infty} \int_1^b \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{x+1}\right) dx \\ &= \lim_{b\to\infty} (\ln|x| - \ln|x+1|)\Big|_1^b \\ &= \lim_{b\to\infty} \Big(\ln|b| - \ln|b+1|\Big) - \ln 1 + \ln 2 \\ &= \ln\left(\lim_{b\to\infty} \frac{b}{b+1}\right) + \ln 2 \\ &= \ln 1 + \ln 2 = \ln 2 \end{aligned}$$

Aufgabe 4

a)

$$\lim_{k\to\infty} \sqrt[k]{\left|\frac{(2+x)^{2k}}{\left(2+\frac{1}{k}\right)^k}\right|} = |2+x|^2 \lim_{k\to\infty} \frac{1}{2+\frac{1}{k}} = \frac{|2+x|^2}{2}.$$

Daher konvergiert die Potenzreihe absolut für $|2+x|^2 < 2$. Das entspricht dem Konvergenzkreis $\{x \in \mathbb{C} : |x+2| < \sqrt{2}\}$ und somit dem Konvergenzradius $r = \sqrt{2}$.

b) Die geometrische Reihe ist die Reihe

$$\frac{1}{1-q} = \sum_{k=0}^{\infty} q^k, \quad \text{für } |q| < 1.$$

Da nach Voraussetzung $x^2+y^2 < 1$ gilt, können wir diese Formel für $q = x^2+y^2$ anwenden und erhalten nach Multiplikation mit y, dass

$$f(x,y) = \frac{y}{1-(x^2+y^2)} = y\sum_{k=0}^{\infty}(x^2+y^2)^k.$$

Für das Taylorpolynom vom Grad 5 zum Entwicklungspunkt $(0,0)$ benötigen wir die ersten drei Summanden der Reihe:

$$\begin{aligned} T_5(f,x,y,(0,0)) &= y + y(x^2+y^2) + y(x^2+y^2)^2 \\ &= y + x^2y + y^3 + x^4y + 2x^2y^3 + y^5. \end{aligned}$$

Aufgabe 5

$$f(x,y) = x^4 - x^2 + (x-y)^2 = x^4 - 2xy + y^2.$$

a) Wir haben $\operatorname{grad} f(x,y) = (4x^3 - 2y, -2x + 2y)$. Als notwendige Bedingung für eine Extremstelle haben wir $\operatorname{grad} f(x,y) = \vec{0}$, also

$$\begin{aligned} &(1) & 4x^3 - 2y &= 0 \\ &(2) & -2x + 2y &= 0 \end{aligned}$$

Aus (2) folgt $y = x$. Einsetzen in (1) ergibt dass

$$4x^3 - 2x = 2x(2x^2-1) = 0 \Rightarrow x_1 = 0,\ x_{2,3} = \pm\frac{1}{\sqrt{2}}.$$

$$y = x \Rightarrow y_1 = 0,\ y_{2,3} = \pm\frac{1}{\sqrt{2}}.$$

damit gibt es drei stationäre Stellen

$$P_1 = (0,0), \quad P_2(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}), \quad P_3 = (-\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}).$$

Die Hesse-Matrix der Funktion f ist

$$H_f(x,y) = \begin{pmatrix} 12x^2 & -2 \\ -2 & 2 \end{pmatrix}.$$

$$H_f(P_1) = \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ -2 & 2 \end{pmatrix}, \quad \det(H_f(P_1)) = -4 < 0 \quad \text{also Sattelpunkt bei } P_1$$

$$H_f(P_{2,3}) = \begin{pmatrix} 6 & -2 \\ -2 & 2 \end{pmatrix}, \quad \det(H_f(P_1)) = 8 > 0 \quad \text{und } 6 > 0 \quad \text{also lokale Minima bei } P_{2,3}$$

b) Die Tangentialebene an der Stelle $(1, -1)$ ist

$$z = f(1,-1)+f_x(1,-1)(x-1)+f_y(1,-1)(y+1) = 4+6(x-1)-4(y+1) = 6x-4y-6.$$

Aufgabe 6

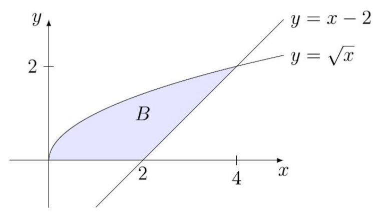

Abbildung 1: Skizze (6-a)

a) Der Schnittpunkt zwischen Parabel und Gerade ist $(4, 2)$. Also wird der B beschrieben durch

$$0 \leq y \leq 2 \quad \text{und} \quad y^2 \leq x \leq y+2$$

und wir erhalten das Integral

$$\int_B f(x,y)d(x,y) = \int_0^2 \int_{y^2}^{y+2} f(x,y)dxdy.$$

b) Mit den Polarkoordinaten

$$x = r\cos(\phi), \quad y = r\sin(\phi),$$

beschreiben wir den Kreisring durch

$$r_1 \leq r \leq r_2, \quad 0 \leq \phi \leq 2\pi.$$

damit gilt:

$$\begin{aligned}
\int_{\mathcal{K}_{r_1,r_2}} (x^2+y^2)\, d(x,y) &= \int_0^{2\pi}\int_{r_1}^{r_2} r^2(\cos^2(\phi)+\sin^2(\phi))rdrd\phi \\
&= \int_0^{2\pi}\int_{r_1}^{r_2} r^3 drd\phi \\
&= \frac{1}{2}\pi({r_2}^4 - {r_1}^4).
\end{aligned}$$