15. März 2011 Prof. Dr. W. Bley

Universität Kassel

Lösungen zur Klausur WS 2010/11 Diskrete Strukturen I (Informatik)

1	2	3	4	5	6	$\sum$

Name:...

Matr.-Nr.:...

Viel Erfolg!

Aufgabe 1 **(4 Punkte)**

Beweisen Sie durch vollständige Induktion

$$\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.$$

Lösung:

Induktionsanfang für $n = 1$: $\sum_{k=1}^{1} k^2 = 1 = \frac{1\cdot 2\cdot 3}{6}$.

Induktionsschritt $n \to n+1$:

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{n+1} k^2 &= \sum_{k=1}^{n} k^2 + (n+1)^2 \\ &= \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + (n+1)^2 \\ &= \frac{2n^3 + 9n^2 + 13n + 6}{6}. \end{aligned}$$

Eine einfache Rechnung zeigt nun, dass

$$(n+1)((n+1)+1)(2(n+1)+1) = 2n^3 + 9n^2 + 13n + 6.$$

Aufgabe 2 **(6 Punkte)**

Es werde dreimal gewürfelt. Der Wert der Zufallsgröße X sei die Summe der gewürfelten Augen.

(a) Berechnen Sie $P(X = 4)$.

(b) Berechnen Sie den Erwartungswert $E(X)$ und die Varianz $V(X)$. Begründen Sie Ihre Rechnung. (Zur Kontrolle: $V(X) = 35/4, E(X) = 11/2$.)

(c) Zeigen Sie $P(7 \leq X \leq 16) > 0,5$.

(Zur Erinnerung seien hier die Markovsche und die Chebychevsche Ungleichung wiedergegeben:

$$P(X \geq t) \leq \frac{E(X)}{t}, \quad P(|X - E(X)| \geq t) \leq \frac{V(X)}{t^2}.$$

)

Lösung:

a) $P(X = 4) = \frac{\#\{(1,1,2),(1,2,1),(2,1,1)\}}{6^3} = \frac{3}{216}$.

b) Es sei $X_i, i = 1, 2, 3$, die Augenzahl beim i-ten Wurf. Dann gilt $X = X_1 + X_2 + X_3$. Offensichtlich ist

$$E(X_i) = \frac{1}{6}(1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6) = \frac{7}{2}.$$

Also erhält man

$$E(X) = E(X_1) + E(X_2) + E(X_3) = \frac{21}{2}.$$

Nun zur Berechnung der Varianz. Es gilt:

$$\begin{aligned} V(X_i) &= E(X_i^2) - E(X_i)^2 = \\ &= \frac{1}{6}(1 + 4 + 9 + 16 + 25 + 36) - \frac{49}{4} = \frac{35}{12}. \end{aligned}$$

Da die Zufallsvariablen X_1, X_2, X_3 unabhängig sind, folgt:

$$V(X) = V(X_1) + V(X_2) + V(X_3) = \frac{35}{4}.$$

c) Die Angabe $E(X) = \frac{11}{2}$ auf der Klausur ist falsch. Teilaufgabe c) wurde daher aus der Wertung genommen.

Aufgabe 3 **(5 Punkte)**

Finden Sie eine explizite Lösungsformel für die Folgenglieder x_n, die rekursiv gegeben sind durch

$$x_n = 4x_{n-1} - 5x_{n-2} + 2x_{n-3} \text{ für } n \geq 3,$$

und den Anfangswerten

$$x_0 = 0, \quad x_1 = 1, \quad x_2 = -2.$$

Berechnen Sie x_{10}.

Lösung:

Das charakteristische Polynom ist von der Form

$$c(X) = X^3 - 4X^2 + 5X - 2 = (X-1)^2(X-2).$$

Der Ansatz $x_n = (a + bn) \cdot 1^n + c \cdot 2^n$ führt wie üblich zu einem linearen Gleichungssystem für die Unbekannten a, b, c. Als Lösung erhält man

$$a = 4, b = 5, c = -4.$$

Das allgemeine Glied hat also die Form

$$x_n = (4 + 5n) - 4 \cdot 2^n$$

und durch Einsetzen erhält man $x_{10} = -4042$.

Aufgabe 4 **(4 Punkte)**

Es werde dreimal hintereinander gewürfelt.

(a) Mit welcher Wahrscheinlichkeit ergeben alle drei Würfe die gleiche Augenzahl?

(b) Mit welcher Wahrscheinlichkeit ergeben alle drei Würfe die gleiche Augenzahl, wenn bereits der erste und der zweite Wurf die gleiche Augenzahl ergeben haben?

(c) Sind die Ereignisse "die Summe der ersten beiden Würfe ist gleich 10" und "die drei Würfe liefern die gleiche Augenzahl" unabhängig?

Lösung:

a) Diese Wahrscheinlichkeit ist $\frac{6}{216} = \frac{1}{36}$.

b) Der gesunde Menschenverstand sagt uns sofort, dass diese Wahrscheinlichkeit $\frac{1}{6}$ ist. Begründung: Die ersten beiden Würfe legen fest, was im dritten Wurf gewürfelt werden muss.

Natürlich kann man dies auch mit der Theorie der bedingten Wahrscheinlichkeiten berechnen. Es sei X_i die Augenzahl beim i-ten Wurf. Weiter sei Y das Ereignis $X_1 = X_2$ und Z das Ereignis $X_1 = X_2 = X_3$. Dann gilt

$$P(Z \mid Y) = \frac{P(Z \cap Y)}{P(Y)} = \frac{P(Z)}{P(Y)} = \frac{6/216}{36/216} = \frac{1}{6}.$$

c) Es gilt

$$P(X_1 + X_2 = 10) = \frac{\#\{(4,6),(5,5),(6,4)\}}{36} = \frac{1}{12}, \quad P(Z) = \frac{6}{216} = \frac{1}{36}.$$

Ferner ist

$$P(X_1 + X_2 = 10 \text{ und } Z) = \frac{\#\{(5,5)\}}{216} = \frac{1}{216} \neq \frac{1}{12} \cdot \frac{1}{36} = P(X_1 + X_2 = 10)P(Z).$$

Also sind die beiden Ereignisse nicht unabhängig.

Aufgabe 5 **(4 Punkte)**

Wie üblich sei $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \ldots\}$ und $\mathbb{Z} = \{0, \pm 1, \pm 2, \ldots\}$.

(a) Gibt es eine injektive Abbildung $f\colon \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$, die nicht surjektiv ist?

(b) Gibt es eine surjektive Abbildung $g\colon \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$, die nicht injektiv ist?

(b) Untersuchen Sie die Abbildung

$$h\colon \mathbb{Z} \times \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{Q}, \quad (a, b) \mapsto \frac{a}{b}$$

auf Injektivität, Surjektivität und Bijektivität.

Lösung:

a) Ja, zum Beispiel die Abbildung $f(n) = 2n$. Die Abbildung ist injektiv, da $f(n) = f(m)$ sofort $n = m$ impliziert. Sie ist nicht surjektiv, da das Bild nur aus den geraden natürlichen Zahlen besteht.

b) Ja, zum Beispiel die Abbildung

$$g(n) = \begin{cases} \frac{n+1}{2}, & 2 \nmid n, \\ \frac{n}{2}, & 2 \mid n \end{cases}$$

Die Bilder von $1, 2, 3, 4, 5, 6 \ldots$ sind gegeben durch $1, 1, 2, 2, 3, 3, \ldots$. Hieraus ersieht man, dass g zwar surjektiv, aber nicht injektiv ist.

c) Die Abbildung h ist surjektiv, aber nicht injektiv. Insbesondere also auch nicht bijektiv. Begründungen: Jede rationale Zahl kann man in der Form a/b mit $a \in \mathbb{Z}$ und $b \in \mathbb{N}$ schreiben (wenn man zusätzlich verlangt, dass $ggT(a, b) = 1$, so ist diese Darstellung sogar eindeutig). Also ist h surjektiv. Wegen $h((ma, mb)) = \frac{ma}{mb} = \frac{a}{b} = h((a, b)$ ist h nicht injektiv.

Aufgabe 6 **(5 Punkte)**

(a) Berechnen Sie die Anzahl der Permutationen der Menge $\{1,2,3,4,5,6,7\}$, die die Menge $\{4,7\}$ auf sich selbst abbilden.

(b) Schreiben Sie die Permutation

$$\pi = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 3 & 2 & 1 & 5 & 6 & 4 & 7 \end{pmatrix}$$

als Hintereinanderausführung von disjunkten Zyklen.

(c) Mit welcher Wahrscheinlichkeit hat eine Permutation der Menge $\{1,2,3,4\}$ genau einen Fixpunkt?

Es gilt

Lösung:

a) Die Anzahl der Permutationen π mit $\pi(4) = 4, \pi(5) = 5$ beziehungsweise $\pi(4) = 5, \pi(5) = 4$ ist jeweils $5! = 120$. Also gibt es insgesamt 240 Permutationen, die die Menge $\{4,7\}$ auf sich selbst abbilden.

b)

$$\pi = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 3 & 2 & 1 & 5 & 6 & 4 & 7 \end{pmatrix} = (1\ 3) \circ (4\ 5\ 6)$$

c) Durch systematisches Abzählen findet man, dass es 8 Permutationen mit genau einem Fixpunkt gibt. Die gesuchte Wahrscheinlichkeit ist also $8/24 = 1/3$.